

THESE

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jean-Marie SIRET

Ingénieur E.S.E.

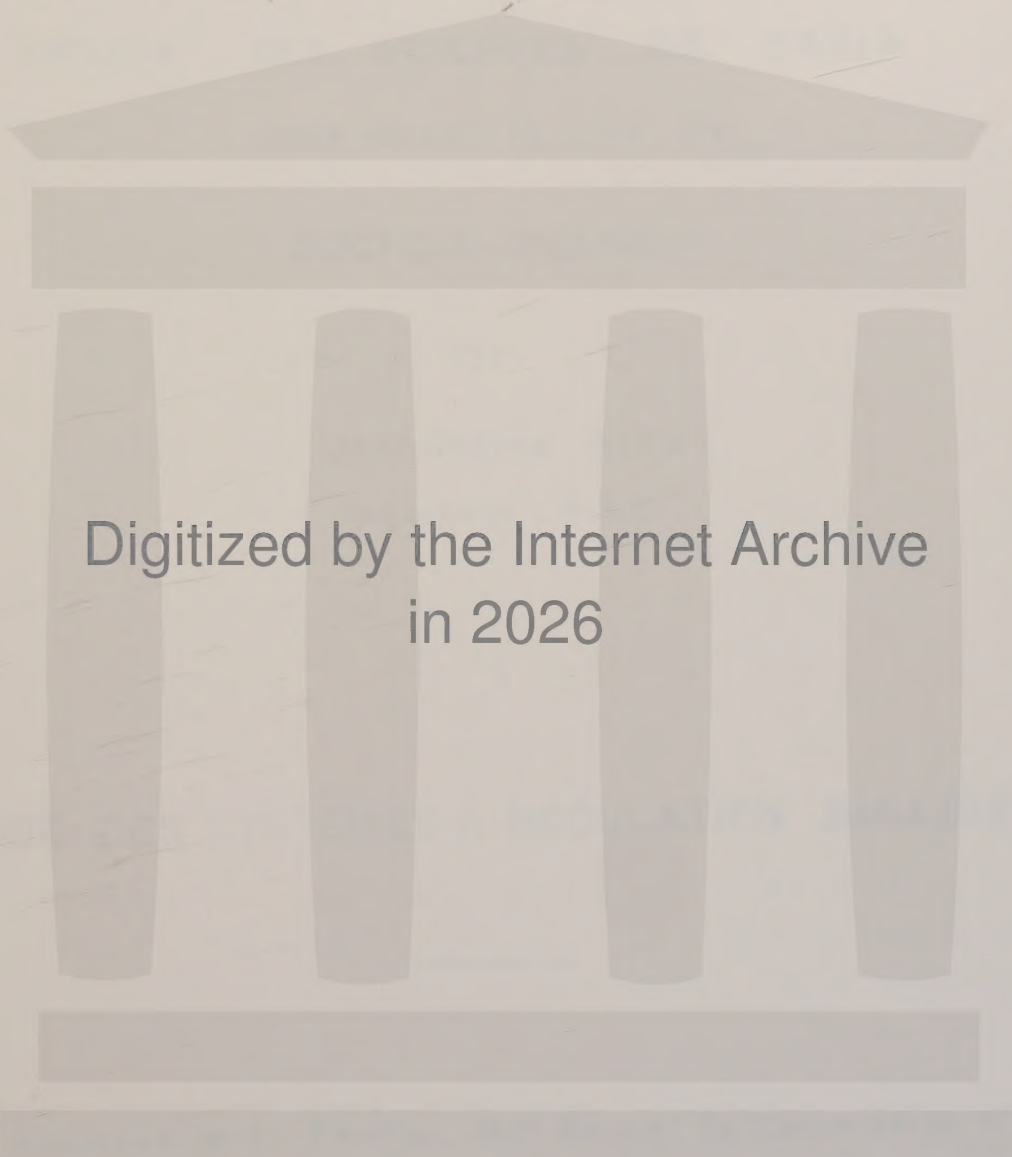
ETUDE DES SYSTEMES A MODULATION BINAIRE

Thèse soutenue le 11 Février 1971 devant la Commission d'Examen

Monsieur A. BLAQUIERE Président

Monsieur P. VIDAL Rapporteur

Monsieur R. BONNEFILLE Examineur



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550420_0019

THESE

présentée à la

FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

pour obtenir le titre de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jean-Marie SIRET

Ingénieur E.S.E.

ETUDE DES SYSTEMES A MODULATION BINAIRE

Thèse soutenue le 11 Février 1971 devant la Commission d'Examen

Monsieur A. BLAQUIERE Président

Monsieur P. VIDAL Rapporteur

Monsieur R. BONNEFILLE Examineur



INTRODUCTION GENERALE

Les travaux que nous avons effectués au Laboratoire de Génie Electrique de la Faculté des Sciences de Paris, associé au C.N.R.S., en collaboration avec le Laboratoire d'Automatique de la Faculté des Sciences de Lille, concernent les asservissements discrets non linéaires, et portent plus précisément sur l'ensemble des systèmes monovariabiles à modulateur binaire et processus commandé linéaire.

Cette étude se décompose en trois parties principales. Dans la première, essentiellement théorique (chapitres deux et trois), la convergence des solutions d'une équation de récurrence matricielle, vers un ensemble d'équilibre non ponctuel, est analysée par une extension de la Seconde Méthode de Ljapunov, et à l'aide de la notion de distance dans les espaces de Banach. Il est alors possible d'étudier la stabilité asymptotique globale ou illimitée des systèmes asservis possédant un ensemble de positions d'équilibre. D'autre part, une méthode basée sur la convergence uniforme d'une variable d'état, permet de caractériser le régime dynamique des asservissements échantillonnés non linéaires.

La seconde partie (chapitres quatre, cinq et six) constitue la mise en oeuvre des méthodes précédemment exposées dans le cas où le filtre est du premier ou du second ordre.

Des domaines de variables dans l'espace des paramètres, assurant la stabilité par rapport aux conditions initiales, sont

ainsi obtenus. Les problèmes de temps de réponse et de comportement dynamique sans dépassement sont également abordés.

Enfin, la dernière partie (chapitre sept) traite du problème de la simulation sur calculatrice analogique. L'utilisation de méthodes de calcul multivitesse conduit au tracé automatique, des domaines de stabilité et montre ainsi la validité des résultats précédemment obtenus.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS

A. REGULATEUR NON LINÉAIRE

1.1. Introduction

Le premier chapitre a pour but de délimiter le cadre des asservissements discrets à régulateur impulsionnel à période constante et objet linéaire, dans l'ensemble des systèmes à non-linéarité inhérente à l'échantillonnage. Quelques propriétés caractéristiques des systèmes à modulation codée, sont ensuite mises en évidence.

1.2. Définition des systèmes échantillonnés

Un système échantillonné est un système dans lequel au moins un signal subit une quantification temporelle appelée échantillonnage. À tout signal continu $x(t)$, cette opération substitue en général un signal $w(t)$ (figure 1.1) constitué par la suite $w_i(t)$ fonction de $x(T_i)$ telle que :

$$w(t) = w_i(t) \quad \text{pour} \quad t \in [T_i, T_{i+1}[$$

Les instants T_i , qui peuvent être régulièrement espacés ou non, sont les instants d'échantillonnage.

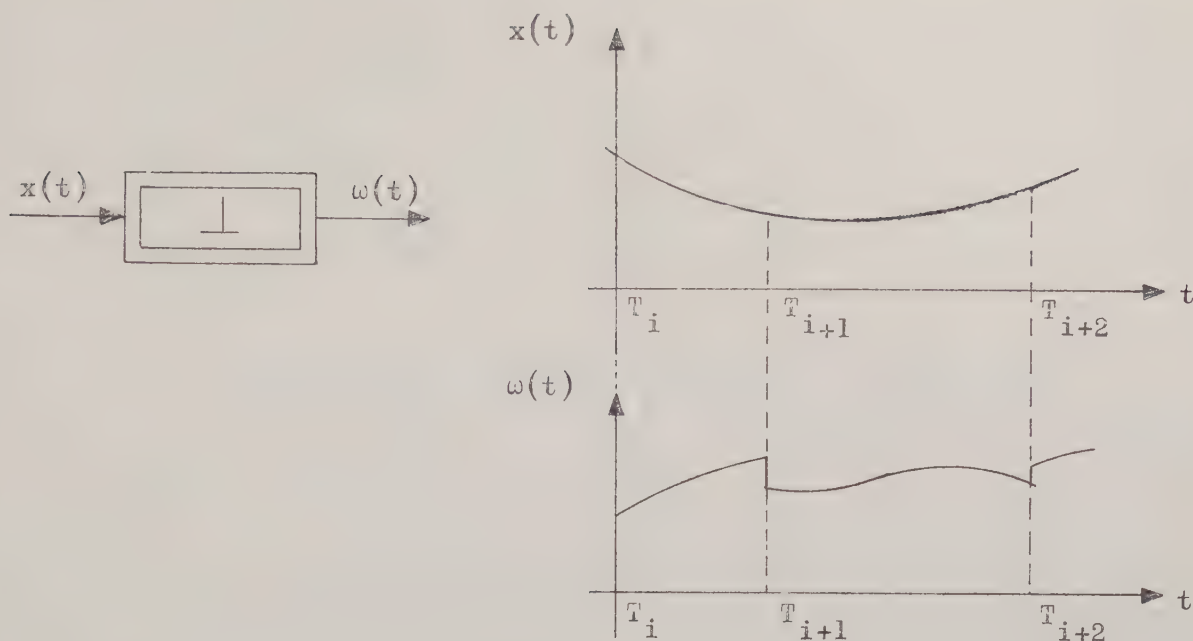


Figure 1.1.

1.3. Divers types de systèmes échantillonnés

Il faut noter, tout d'abord, que l'établissement d'une classification des systèmes échantillonnés constitue une opération difficile et nécessairement quelque peu arbitraire. Néanmoins il est possible de ranger les asservissements échantillonnés en deux grandes catégories selon qu'ils sont linéaires ou non linéaires. Parmi ces derniers, on peut encore faire une distinction suivant l'emplacement de la non-linéarité ; elle peut apparaître dans l'objet à régler ou dans l'échantillonneur-régulateur, ou dans les deux simultanément :

- a) Systèmes échantillonnés linéaires.
- b) Systèmes échantillonnés non linéaires.:
 - échantillonneur linéaire, objet non linéaire
 - échantillonneur non linéaire, objet linéaire
 - échantillonneur non linéaire, objet non linéaire.

Chacune des trois catégories de systèmes échantillonnés non linéaires constitue, en réalité, un ensemble très vaste, étant donné le grand nombre de non-linéarités que l'on peut rencontrer. Aussi allons nous préciser la classe des systèmes à échantillonneur non linéaire et objet linéaire, à laquelle appartient le système que nous avons étudié plus particulièrement au cours de nos recherches.

1.4. Diverses sortes d'échantillonneurs non linéaires

Le modulateur élément caractéristique de ces systèmes, permet de définir divers groupes.

1.4.1. Echantillonneurs à période variable (1) (2) (3).

Ce type de modulation se rencontre par exemple en télémétrie dans le domaine de l'astronautique, en raison de sa grande insensibilité au bruit. Utilisé également pour le contrôle d'attitude des véhicules spatiaux, il permet une consommation de fuel réduite.

Dans ces modulateurs une impulsion calibrée est émise (figure 1.2) lorsqu'une fonction du signal d'entrée est égale à un multiple d'un certain quantum.

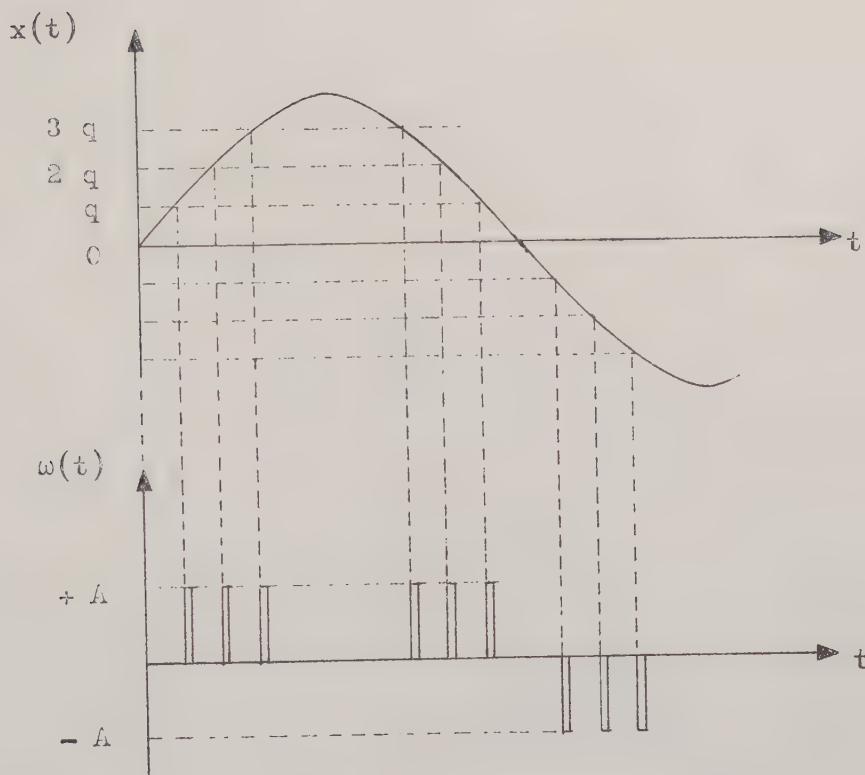


Figure 1.2.

1.4.2. Echantillonneur à période constante.

Les caractéristiques du signal de sortie du modulateur font apparaître plusieurs sortes de régulateurs. Nous allons présenter les plus utilisés.

1.4.2.1. Systèmes à modulation de largeur.

Le signal de sortie $w(t)$ du modulateur est constitué par une impulsion d'amplitude A constante et de largeur h au plus égale à la période et fonction du signal d'entrée.

La largeur h peut en outre être quantifiée ou non (figure 1.3).

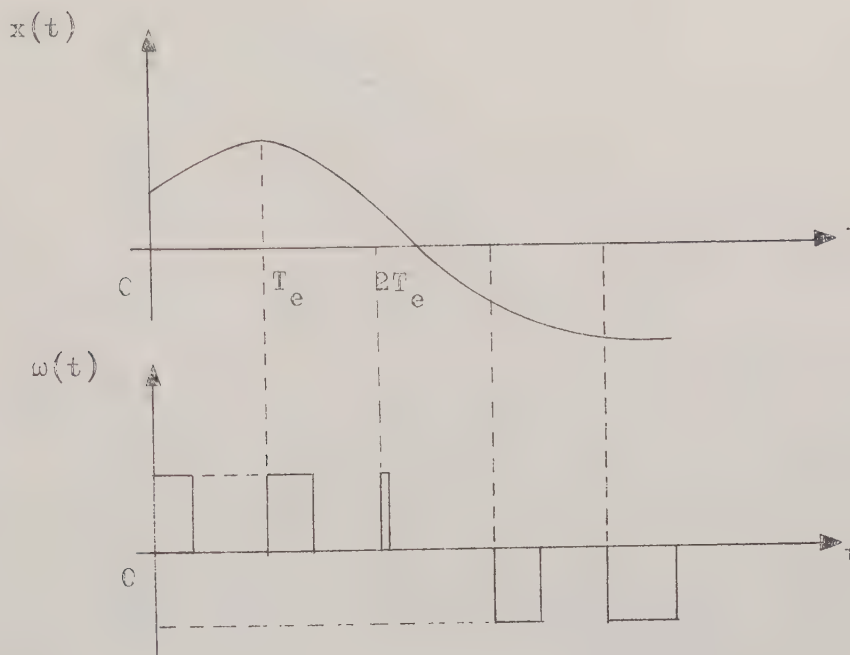


Figure 1.3.

1.4.2.2. Systèmes à modulateur impulsif.

Nous appelons modulateur impulsif, un modulateur dont le signal de sortie est constitué par une impulsion (ou une suite d'impulsions) d'amplitude et de largeur constantes, dont la (ou les) position est fonction du signal d'entrée.

1.5. Principaux modulateurs impulsifs

1.5.1. Modulateur PSM (5) (Pulse Sign Modulation).

Une impulsion calibrée (A sign (x_n) , h) est émise en début de période, lorsque l'entrée échantillonnée x_n est supérieure à un certain quant Q (figure 1.4).

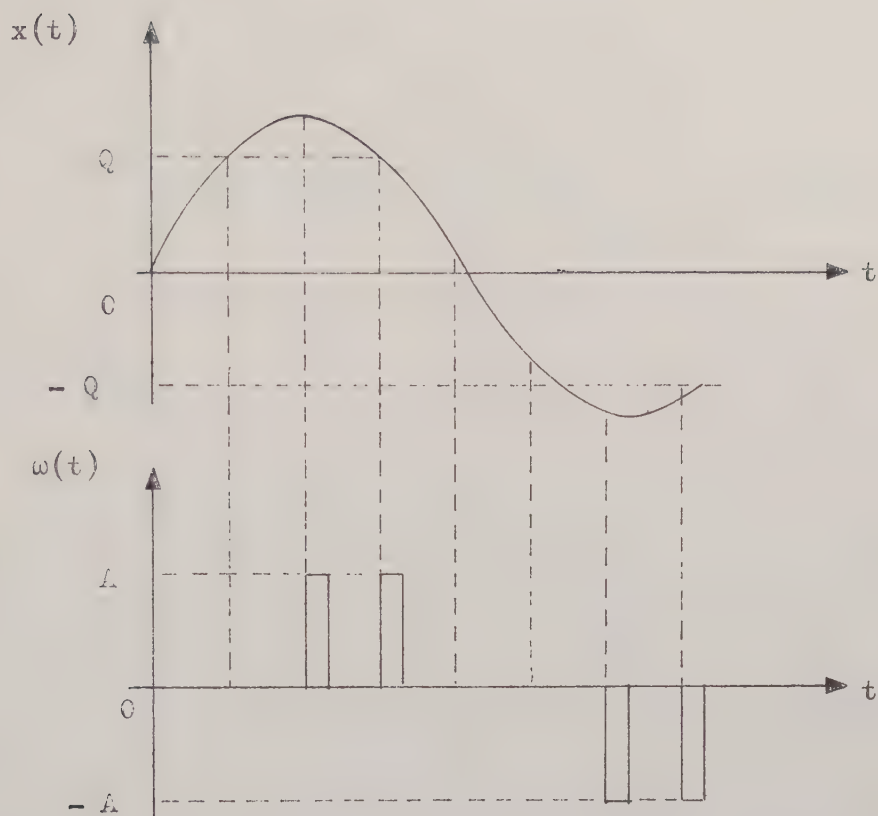


Figure 1.4.

1.5.2. Echantillonneur à modulation de position (6).

Une impulsion calibrée est émise au cours de la période ; sa position par rapport à l'instant d'échantillonnage est une fonction de l'entrée quantifiée ou non (figure 1.5.).

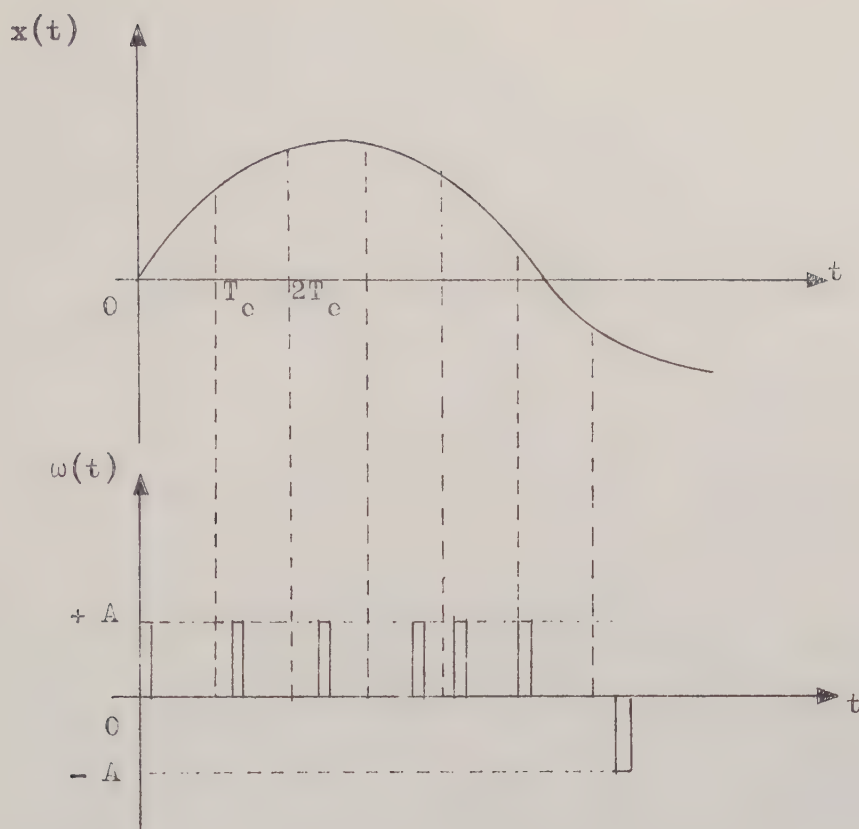


Figure 1.5.

1.5.3. Modulation par un train d'impulsions (7).

L'échantillonneur élabore entre deux instants d'échantillonnage une suite d'impulsions calibrées groupées en début de période et dont le nombre est fonction de l'entrée.

1.5.4. Echantillonneur à modulation de cadence (7).

L'échantillonneur émet des impulsions calibrées également réparties dans la période ; leur nombre est fonction du signal d'entrée (figure 1.6).

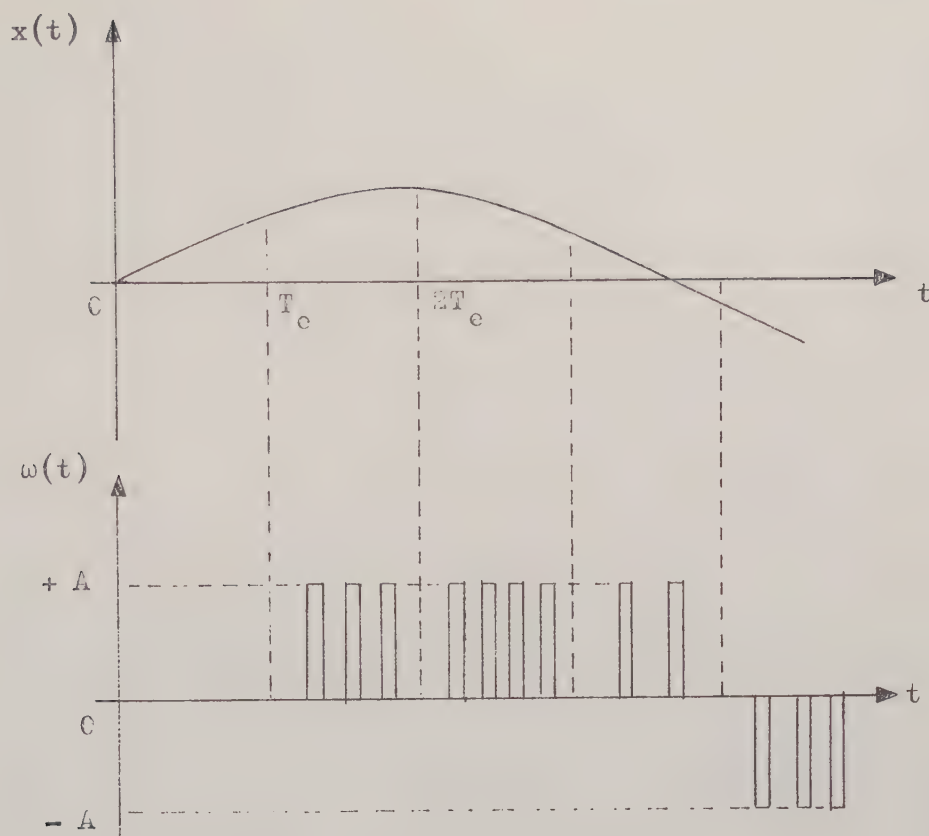


Figure 1.6.

1.6.5. Échantillonneur à modulation binaire.

Un tel modulateur émet à l'intérieur de la période d'échantillonnage, suivant un code donné, une suite d'impulsions calibrées correspondant à la valeur échantillonnée de l'entrée (figure 1.7). Les échantillonneurs à modulation binaire sont liés à l'utilisation directe d'une calculatrice numérique dans un système de régulation.

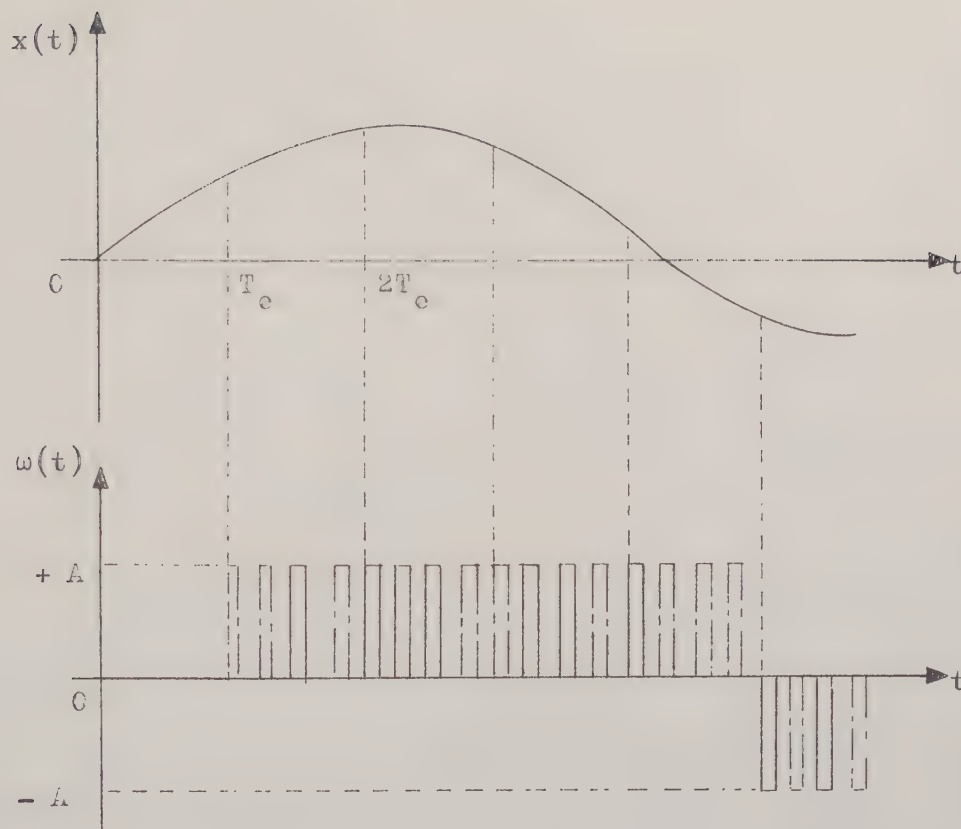


Figure 1.7.

1.5.3. Remarque.

La liste des modulateurs que nous avons donnée, n'est pas exhaustive et il existe bien d'autres types de modulation. Il faut citer en particulier les doubles modulations : systèmes à période et amplitude variables, systèmes à période et largeur variables (8), systèmes à modulation d'amplitude et de largeur (9), qui peuvent conduire à des performances très intéressantes.

1.3. Caractéristiques des modulateurs binaires

L'utilisation de tels modulateurs implique nécessairement une quantification du signal d'entrée. Trois paramètres définissent la loi de quantification : le seuil s_0 , le pas a , et la valeur de la saturation (figure 1.8).

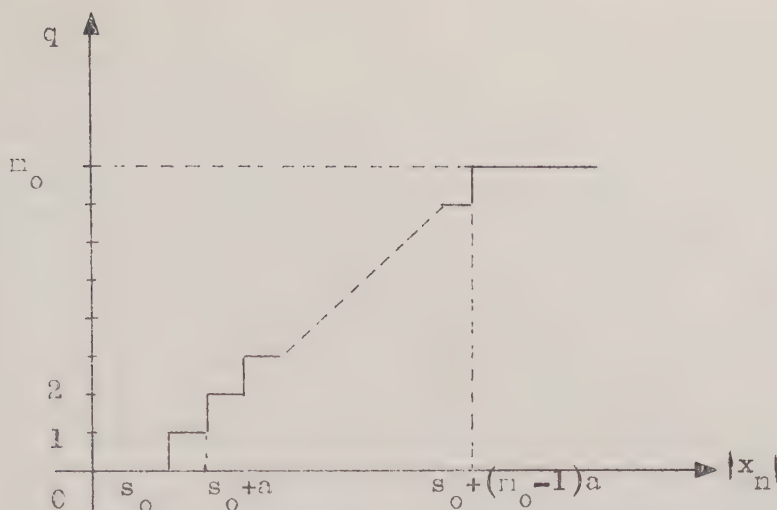


Figure 1.8.

A chaque valeur de q , traduite selon un code binaire, est attribuée une suite d'impulsions émises au cours de la période.

Une première difficulté d'étude des systèmes utilisant un tel modulateur apparaît : nous nous trouvons, outre le choix du code, en présence d'un nombre élevé de paramètres. Le fonctionnement du modulateur binaire est défini en effet par cinq paramètres : période d'échantillonnage, largeur et amplitude des impulsions, seuil et pas de quantification.

1.7. Mise en équation des systèmes étudiés.

Les systèmes monovariabiles, à modulateur binaire et objet linéaire, auxquels nous limiterons notre étude, peuvent être représentés par le schéma de la figure 1.9.

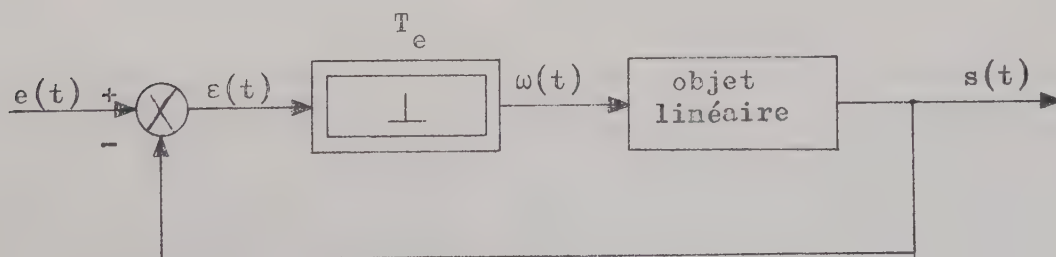


Figure 1.9.

de période d'échantillonnage T étant constante, l'utilisation des équations se détermine dans forme vectorielle ou scalaire s'avère particulièrement avantageuse.

Soit q l'ordre du filtre et n l'ordre du quantificateur régissant le filtre (en q bits). L'état du filtre peut donc être décrit par un vecteur à q composantes (sur deux bits, la sortie s et ses $(q-1)$ premières dérivées). Désignons par S_n l'état à l'instant nT .

L'état à l'instant $(n+1)T$ est donné par l'équation matricielle suivante :

$$S_{n+1} = A S_n + K(e_n)$$

Dans cette équation, A , matrice carrée d'ordre q , à coefficients constants, est une matrice caractéristique du filtre, le terme $A S_n$ représentant l'évolution en régime libre.

$K(e_n)$, vecteur à q composantes, correspond à la contribution de la régulation, c'est-à-dire du signal $e(t)$, au cours de l'intervalle $[nT, (n+1)T]$.

Il résulte alors de ce qui précède, en suite de la quantification et du passage au signal $e(t)$, le vecteur $K(e_n)$ possède deux caractéristiques importantes, se révélant des difficultés notables à l'étude du système :

- D'une part, les composantes de $K(e_n)$ présentent des discontinuités entre chaque intervalle de quantification et comportent des termes fonctions implicites de l'erreur e_p (mots du code).
- D'autre part, les codes des différents chiffres binaires représentant la valeur de l'erreur quantifiée, n'apparaissent pas dans les composantes de $K(e_n)$ ce qui signifie que, dans certaines conditions la contribution de la régulation peut s'écrire avec $|e_n|$; une telle situation risque évidemment de favoriser l'existence de cycles limites.

1.2. Intérêt des systèmes asservis à modulateur binaire

La commande numérique directe (Direct Digital Control) d'un processus répond au schéma bloc très général de la figure 1.10.

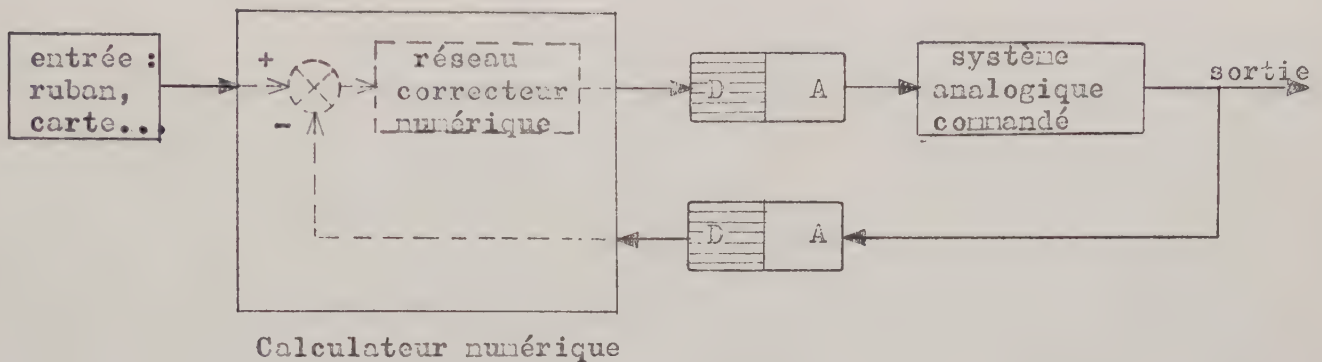


Figure 1.10

L'utilisation d'un modulateur binaire permet de supprimer le convertisseur numérique analogique en commandant, directement, par l'intermédiaire d'un simple amplificateur de puissance, l'objet à régler par la sortie série du calculateur. Si, comme c'est souvent le cas dans les unités industrielles, le calculateur contrôle plusieurs dizaines de systèmes bouclés, une telle opération peut se révéler intéressante.

1.3. Conclusion

En fait, dans le cas où $\hat{G}$, les systèmes asservis à modulation binaire, on a vu que les problèmes sont. Trois difficultés apparaissent en effet : les problèmes de paramètres, l'équation de récurrence à coefficients présentant des discontinuités, contribution de la régulation devant l'oscillation de la valeur absolue de l'erreur.

Malgré cela, avant d'entreprendre cette étude, il convient de préciser tout d'abord, que les notions de stabilité et de régime dynamique des systèmes récurrents.

CHAPITRE 2

STABILITE D'UN SYSTEME NON LINEAIRE

A UN DISCRET ET A CONTINU

2.1. Introduction

L'analyse de la stabilité asymptotique des systèmes non linéaires peut être menée grâce à diverses méthodes, mais une technique particulièrement puissante, et qui est à l'origine de nombreux critères, est constituée par la Seconde Méthode de Lyapunov. Nous en présentons dans la première partie de ce chapitre, une extension aux systèmes discrets lorsque l'origine n'est pas le seul point d'équilibre. Dans la deuxième partie, le problème de la stabilité est abordé en utilisant les notions d'espaces métriques de Banach, et de contraction d'une transformation ponctuelle. La définition de la distance d'un point de l'espace à un ensemble, permet d'obtenir une condition suffisante de convergence vers un ensemble d'équilibre.

2.2. Méthode discrète de Lyapunov

Initialement destinée à l'étude de la stabilité des solutions d'équations différentielles non linéaires, la Seconde Méthode de Lyapunov a été étendue par A. Mohn aux équations aux différences finies, et s'applique par conséquent aux systèmes échantillonnés non linéaires à période constante.

2.2.1. Rappel de la méthode de Lyapunov.

Rappelons brièvement les conditions d'application de cette méthode (16).

Soit un système échantillonné non linéaire d'ordre q , dont l'état à l'instant d'échantillonnage nT est représenté par un vecteur x_n de composante x_n^i ($i = 0, 1, \dots, q-1$). L'évolution de ce système est décrite par l'équation de récurrence matricielle :

$$X_{n+1} = A_n X_n \quad (2.1)$$

où A_n est une matrice carrée d'ordre q à coefficients non constants. Le point d'équilibre de la dynamique est supposé ramené à l'origine.

S'il est possible de trouver une fonction $V(X_n) = V_n$ satisfaisant les conditions :

- a) $V(X_n)$ est partout positive (sauf à l'origine où $V_n = 0$)
- b) la différence finie $\Delta V_n = V_{n+1} - V_n$ est négative (sauf à l'origine) dans le système décrit par l'équation (2.1) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

Il convient de remarquer que cette méthode, qui suppose l'existence d'une unique position d'équilibre, ne peut s'appliquer sous cette forme à la classe de systèmes dont la chaîne d'action comporte un saut (présence de quantificateur, relais,...) et une partie continue linéaire présentant au moins une intégration. Dans ce cas, en effet, l'origine n'est pas le seul point d'équilibre du système, il existe un ensemble de positions d'équilibre situées à l'intérieur du saut.

2.2.2. Extension du critère de Lyapunov.

La Salle et Lafschetz (11) ont présenté, pour les équations différentielles non linéaires, une extension du critère de Lyapunov à ce cas critique. Nous pouvons, par analogie, formuler un théorème pour le cas discret.

Il faut, auparavant, définir certaines notions :

- Nous dirons que Γ est un ensemble limite de l'équation (2.1) si les solutions bornées de (2.1) tendent vers Γ lorsque n tend vers $+\infty$. (Γ peut être un point d'équilibre, un ensemble de points d'équilibre, ou un cycle limite).

- Nous dirons que K est un ensemble invariant de l'équation (2.1), si étant donné un point initial X_0 appartenant à K , toute trajectoire passant par X_0 appartient à K à tout instant ($n > 0$ ou $n < 0$).

- S'il est possible de montrer que X_n est borné pour $n \geq 0$, alors son ensemble limite Γ est un ensemble invariant, non vide.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème :

2.2.2.1. Théorème 1.

$V_n = V(X_n)$ étant une fonction scalaire univoque de X_n , continue, positive pour tout $X_n \neq 0$, soit Ω_1 la région de l'espace de phase où $V_n \leq 1$. Supposons que Ω_1 est bornée et qu'à l'intérieur de Ω_1 :

$$(a) \quad \Delta V_n = V_{n+1} - V_n \leq 0$$

Soit E l'ensemble de tous les points intérieurs à Ω_1 tels que $\Delta V_n = 0$ et soit M le plus grand ensemble invariant appartenant à E . Alors toute solution X_n appartenant à Ω_1 tend vers M lorsque $n \rightarrow +\infty$.

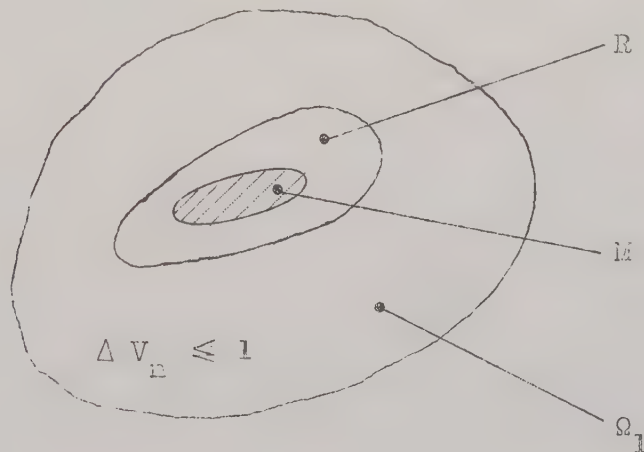


Figure 2.1.

La démonstration que nous proposons est une démonstration simplifiée, à l'usage des ingénieurs en Automatique.

Démonstration.

La définition de Ω_1 et la condition (a) impliquent que les solutions $X(n)$ situés à l'instant initial $n = 0$ dans Ω_1 , restent dans Ω_1 pour tout $n > 0$. La fonction $V(X_n)$ non croissante et bornée inférieurement, a donc une limite l_0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par continuité on conclut que $V(X_n) = l_0$ sur l'ensemble limite Γ de X_n ; d'où Γ est dans Ω_1 et $\Delta V_n = 0$ sur Γ . Par suite Γ est dans E et puisque Γ est un domaine invariant, il est dans M . X_n , restant dans Ω_1 , est borné pour $n \geq 0$, et tend ainsi vers M lorsque n tend vers $+\infty$.

Le théorème VIII de La Salle permettant d'étudier la stabilité dans tout l'espace, peut également être transposé (12). Nous ne donnerons pas la démonstration, celle-ci étant pratiquement identique à celle du théorème précédent.

2.2.2. Théorème 2.

$V_n = V(X_n)$ étant une fonction scalaire univoque de X_n , continue, positive pour tout $X_n \neq 0$, supposons que $\Delta V_n = V_{n+1} - V_n \leq 0$ pour tout X_n . Soit R l'ensemble de tous les points tels que $\Delta V_n = 0$ et soit M le plus grand ensemble invariant contenu dans R . Alors toutes les solutions bornées pour $n > 0$ tendent vers M lorsque n tend vers l'infini.

Si, de plus, V_n tend vers l'infini lorsque $\|X_n\|$ tend vers l'infini, toutes les solutions sont bornées pour $n \geq 0$ et nous pouvons affirmer que toutes les solutions tendent vers M lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque : Si l'ensemble M ne comprend que des positions d'équilibre, l'ensemble de ces positions d'équilibre possède la stabilité absolue.

Les deux théorèmes énoncés permettent d'étudier la stabilité du système (2.1) dans le cas critique, rencontré fréquemment en pratique, où $\Delta V_n = 0$ dans une partie de l'espace de phase et où l'origine n'est pas la seule position d'équilibre.

2.3. Stabilité dans les espaces métriques

L'état d'un système échantillonné d'ordre q , dont le comportement est décrit par une équation de récurrence matricielle telle que (2.1), est représenté par un vecteur appartenant à un espace vectoriel U de dimension q .

2.3.1. Définitions - Stabilité (2.3).

D'un espace vectoriel U muni d'une métrique, la stabilité est étudiée à l'aide de la propriété de contraction d'une transformation.

2.3.1.1. Notion de distance.

Une distance entre deux éléments X_i et X_j de U est une application d de U^2 dans $\mathbb{R}^+$ (ensemble des réels positifs ou nuls), qui vérifie les trois axiomes suivants :

a) Identité.

$$\forall (X_i, X_j) \in U^2 \quad d(X_i, X_j) = 0 \iff X_i = X_j$$

b) Symétrie.

$$\forall (X_i, X_j) \in U^2 \quad d(X_i, X_j) = d(X_j, X_i)$$

c) Inégalité triangulaire.

$$\forall X_i, X_j \in U$$

$$\forall X_k, X_l \in U \quad d(X_i, X_j) \leq d(X_i, X_k) + d(X_k, X_j)$$

$$\forall X_m, X_n \in U$$

2.3.1.2. Espace métrique complet.

L'espace métrique U est dit complet, si toute suite de Cauchy (c'est-à-dire toute suite satisfaisant la condition de Cauchy) converge dans cet espace.

2.3.1.3. Contraction d'un opérateur.

Dans l'espace métrique complet J , considérons l'opération définie par la relation (2.2) ci-dessous, qui transforme un élément X_n de J en un autre élément X_{n+1} du même espace.

$$X_{n+1} = F(X_n) \quad (2.2)$$

L'opération F est une contraction si pour deux éléments distincts quelconques X_1 et X_2 on a :

$$d(F(X_1), F(X_2)) \leq \alpha d(X_1, X_2) \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \quad (2.3)$$

Dans ces conditions il est possible de démontrer (16) le résultat suivant :

- Il existe dans tout l'espace J qu'un seul élément X_F , appelé point fixe de la transformation, tel que :

$$X_F = F(X_F)$$

- La suite de points $(X_0, X_1 = F(X_0), \dots, X_{n+1} = F(X_n), \dots)$ obtenue à partir d'un élément quelconque X_0 , converge vers le point fixe X_F .

2.3.2. Extension au cas où il existe un ensemble de points fixes.

Afin de pouvoir appliquer cette méthode au cas où le point fixe n'est pas unique, nous allons présenter la démonstration suivante.

Considérons toujours la relation de récurrence (2.2), soit F l'ensemble des points fixes de l'opération F .

$$F = \{X : X = F(X)\}$$

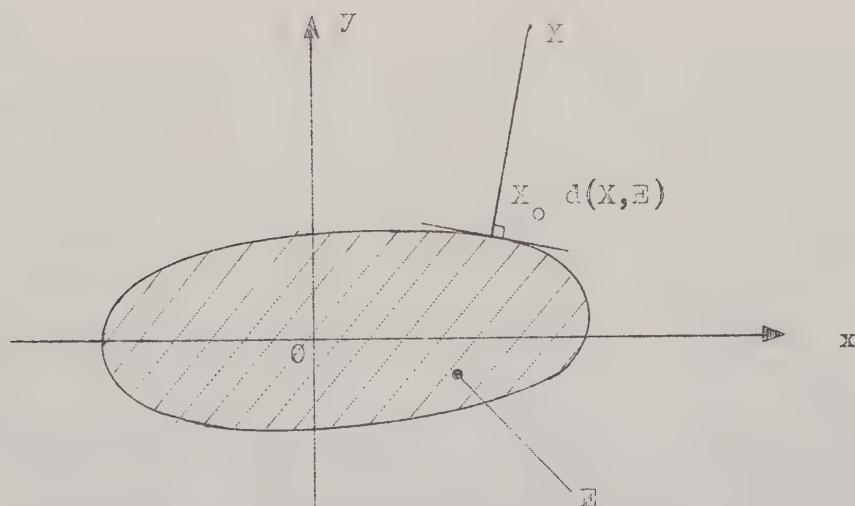
Supposons, de plus, que l'origine appartienne à cet ensemble.

Définissons alors la distance $d(X, E)$ d'un point X de l'espace à l'ensemble E (2.4).

$$d(X, E) = \inf_{X_i \in E} d(X, X_i) \quad (2.4)$$

L'origine appartenant à l'ensemble E , il est évident que

$$d(X, E) \leq d(X, 0) = d(X) = \|X\| \quad (2.5)$$



Distance d'un point X à un ensemble E lorsque la norme choisie est la norme euclidienne

Figure 2.2.

Désignons par D l'ensemble des points tels que

$$d(X_{n+1}) \leq \alpha d(X_n) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.6)$$

et par E l'ensemble des points tels que

$$d(X_{n+1}) = d(X_n) \quad (2.7)$$

$$d(X_{n+1}, E) \leq \beta d(X_n, E) \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.8)$$

Alors, toute solution X_n de l'équation de récurrence (2.2) appartenant à l'ensemble $\Omega = \text{DUR}$ converge vers E lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration.

Considérons les deux suites positives $d(X_n)$ et $e(X_n, E)$. Les relations (2.0) et (2.1) entraînent que la suite $d(X_n)$ est décroissante, étant bornée inférieurement par zéro, elle admet donc une limite. Par conséquent, la suite $e(X_n, E)$, majorée par $d(X_n)$ admet aussi une limite. Il convient alors de distinguer deux cas :

a) Les termes de la suite $d(X_n)$ sont tous égaux à partir d'un certain rang.

La solution de l'équation (2.2) appartient donc nécessairement à E et l'inégalité (2.0) montre que la suite $e(X_n, E)$ tend vers zéro.

b) Les termes de la suite $d(X_n)$ ne sont pas tous égaux à partir d'un certain rang.

Dans ces conditions, il est possible d'écrire

$$d(X_{n+k}), E) \leq \alpha^k d(X_n) \quad \text{avec } \alpha < 1 \quad (2.9)$$

où plus, α tend vers l'infini avec k .

En effet, si α reste constant lorsque n tend vers l'infini, les termes de $d(X_n)$ sont tous égaux à partir d'un certain rang, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La suite $e(X_n, E)$ tend donc vers zéro.

2.3.3. Stabilité illimitée (15).

Si la relation (2.10) ci-dessous est vérifiée dans tout l'espace U , pour tout X_n n'appartenant pas à DUR , il y a stabilité asymptotique illimitée.

$$\|A_n X_n\| \leq \alpha \|X_n\| \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.10)$$

Le norme de la matrice A pouvant être définie par

$$\|A\| = \max_{X \in U} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \quad (2.11)$$

la condition suffisante de stabilité illimitée peut s'écrire :

$$\|A_{\pm}\| < \alpha < 1 \quad (2.12)$$

L'utilisation des trois normes usuelles conduit aux conditions :

$$\max_i \sum_{j=1}^q |a_{ij}| < \alpha < 1 \quad \text{avec} \quad \|X\| = \max_i |x_i|$$

$$\max_i \sum_{j=1}^q |a_{ji}| < \alpha < 1 \quad \text{avec} \quad \|X\| = \sum_{j=1}^q |x_j|$$

$$\max_i |\lambda_i| < \alpha < 1 \quad \text{avec} \quad \|X\| = \sqrt{X^T X}$$

où λ_i sont les valeurs propres de la matrice $A^T A$.

4.3.4. Stabilité limitée (13).

Si la relation (2.10) n'est plus vérifiée dans tout l'espace mais seulement dans un hypervolume G incluant l'ensemble $E_0 L$, ce domaine G constitue un domaine de stabilité par rapport aux valeurs des variables.

Une hypersurface isodistance étant définie par

$$\|X\| = c \text{ cste}$$

il est possible de déterminer (?) un domaine K plus petit que G où la stabilité par rapport aux conditions initiales est assurée.

K est constitué par la plus grande surface isodistance inscrite dans G.

2.4. Conclusion

Nous avons présenté au cours de ce chapitre, deux méthodes particulièrement puissantes, permettant d'étudier la convergence des solutions d'une équation de récurrence matricielle vers un ensemble de points d'équilibre. Avant d'appliquer ces résultats au cas où la chaîne d'action du système asservi comprend un seuil et une intégration, nous allons rechercher des conditions caractérisant le régime dynamique du système.

SUMMARY

ETUDE DU REGIME DYNAMIQUE D'UN SYSTEME ECHANTILLONNE

1.1. Introduction

Dans l'étude d'un système asservi, la stabilité constitue un problème fondamental, mais les conditions relatives au régime transitoire sont d'une grande importance pratique. De nombreuses méthodes, s'appliquant aux systèmes discrets linéaires, ont été mises au point et conduisent à divers types de réponse : réponse pile (sans dépassement et en un nombre fini de périodes), introduction d'un facteur d'amortissement, réponse en temps minimal, ...

Par contre, peu d'auteurs se sont intéressés à ce problème du régime dynamique, dans le cas des systèmes discrets non linéaires.

Afin d'analyser le régime dynamique des systèmes échantillonnés autrement à non linéarité sans mémoire, décrits par une équation de récurrence du second ordre, nous nous proposons d'interpréter la convergence uniforme d'une variable d'état dans le plan σ -phase (17) et d'obtenir ainsi des domaines de stabilité par rapport aux conditions initiales, à l'intérieur desquels la réponse se fait sans dépassement.

L'intérêt d'un tel type de réponse est de diminuer les efforts subis par le système commandé, sans pour autant augmenter notablement la durée du régime transitoire, comme l'application de la méthode le montrera.

1.2. Exposé de la méthode

Considérons un système asservi à retour unitaire, dont la chaîne d'action comporte un échantillonneur non linéaire et un objet du second ordre, à non linéarité séparable ou non, symétrique, sans hystérésis.

L'état du système est caractérisé à chaque instant d'échantillonnage par un vecteur état de composantes x_n, y_n .
Supposons sa position d'équilibre en équilibre ramenée à l'origine des coordonnées.

L'évolution du système est décrite par les équations récurrentes linéaires :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_n + b_n y_n \\ y_{n+1} = c_n x_n + d_n y_n \end{cases} \quad (3.1)$$

a_n, b_n, c_n et d_n fonctions univoques de $|x_n|$ et bornées.

3.3.1. Recherche du temps de réponse par rapport aux valeurs des variables.

Afin de déterminer dans le plan de phase discret un domaine assurant au système discret par l'équation (3.1) un régime dynamique fini et sans dépassement, imposons la convergence uniforme de la variable d'état x_n (ce qui entraîne la convergence de y_n).

La durée de convergence à $\beta\%$ près de la variable x_n étant définie comme le nombre α de séquences d'échantillonnage au bout duquel la variable x_n , de valeur initiale x_0 ne s'éloigne plus de sa valeur à l'équilibre de : $\pm \frac{\beta}{100} x_0$, une condition suffisante s'écrit :

$$|x_{n+1}| < V |x_n| \quad \text{avec} \quad V^\alpha < \frac{\beta}{100} < 1 \quad (3.2)$$

L'absence de dépassement transitoire implique que x_n et x_{n+1} soient de même signe. Supposant par exemple x_n positif, il convient alors d'imposer :

$$\begin{cases} x_{n+1} > 0 \\ x_{n+1} < V x_n \end{cases} \quad (3.3)$$

ce qui s'écrit à l'aide de (3.1) :

$$-\frac{a_n}{b_n} x_n < y_n < \frac{V - a_n}{b_n} x_n \quad \text{si} \quad b_n > 0 \quad (3.4)$$

Le système (3.4) définit dans le plan de phase discret (x_n, y_n) une région R à l'intérieur de laquelle une durée de convergence par rapport aux valeurs des variables est assurée.

3.2.2. Domaine de temps de réponse par rapport aux conditions initiales.

Il est possible de déterminer un domaine D inclus dans R où la condition (3.4) est constamment vérifiée (ce qui entraîne alors la convergence de y_n). Ce domaine D, à l'intérieur duquel, quelles que soient les conditions initiales, le temps de réponse choisi est garanti, peut être défini par :

$$\begin{cases} -\gamma_n x_n < y_n < -\delta_n x_n \\ \gamma_n \leq -\frac{a_n}{b_n} \quad \delta_n \geq -\frac{V - a_n}{b_n} \end{cases} \quad (3.5)$$

De plus D doit être tel, que si $M_n(x_n, y_n)$, point représentatif de l'état du système à l'instant n, appartient à D, le conséquent $M_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ de M_n par la transformation ponctuelle (3.1) appartient aussi à D. Si γ_n est une fonction décroissante de $|x_n|$ et δ_n une fonction croissante de $|x_n|$, la propriété précédente se traduit par la relation :

$$-\gamma_n x_{n+1} < y_{n+1} < -\delta_n x_{n+1} \quad (3.6)$$

En tenant compte de l'équation (3.1), nous pouvons montrer (voir Annexe 1) que les inégalités (3.6) s'expriment au moyen des conditions suffisantes :

$$\begin{cases} \gamma_n^2 b_n + (a_n - c_n) \gamma_n - c_n < 0 & \gamma_n > 0 \quad a_n > 0 \\ \delta_n^2 b_n + (a_n - c_n) \delta_n - c_n > 0 & c_n c_n - b_n c_n > 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Le choix des fonctions γ_n et δ_n permet de déterminer un domaine D de durée de convergence donnée par rapport aux conditions initiales (1) à l'intérieur duquel le régime dynamique du système est caractérisé par une absence de dépassement.

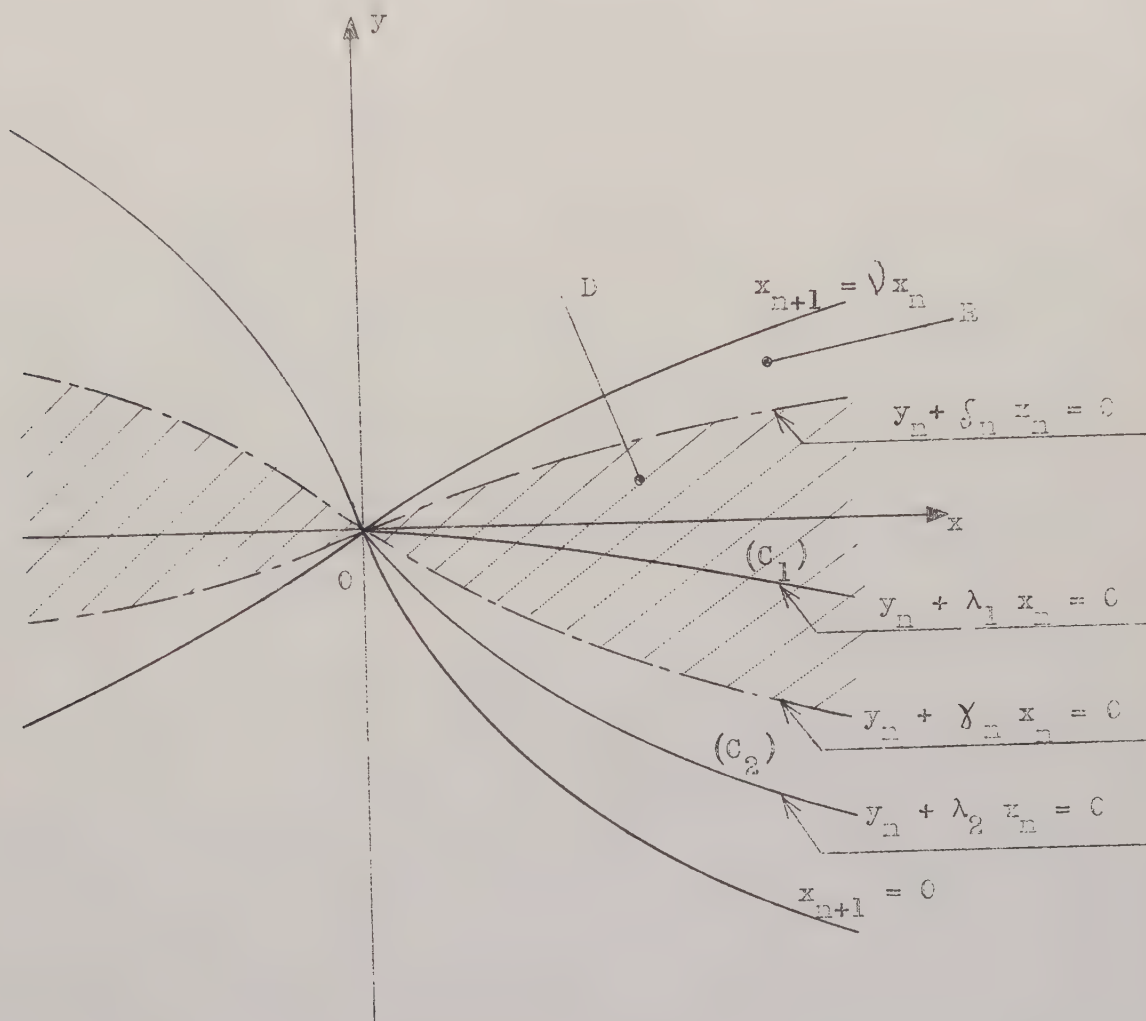


Figure 3.1.

La figure 3.1 montre comment le choix des fonctions γ_n et δ_n est facilité par le tracé des caractéristiques (C_1) et (C_2) correspondant aux racines $\lambda_1(|x_n|)$ et $\lambda_2(|x_n|)$ de l'équation :

$$\lambda^2 b_n + \lambda (c_n - a_n) - c_n = 0 \quad (3.3)$$

Dans la pratique, il est intéressant de chercher, bien entendu, à obtenir un domaine D inclus dans L, aussi grand que possible.

3.3. Conclusion.

Cette méthode, qui permet de rechercher des domaines de conditions initiales où la réponse se fait sans déassement, s'adapte très bien à une simulation sur calculatrice analogique. Nous verrons, au chapitre suivant, comment une propriété géométrique des caractéristiques C_1 et C_2 rend leur détermination aisée ; une méthode de tracé automatique permettant d'obtenir directement le domaine D, sera alors présentée.

CHAPITRE 4

ANALYSE DU REGIME DYNAMIQUE D'UN ASSEMBLAGE AIT SOUS-COMMANTE PAR UN CALCULATEUR BINAIRE ET UN OBJET DU TYPE FIL CHAUFFE

4.1. Introduction

Parmi les différents calculateurs d'impulsions présentés au cours du premier chapitre, nous avons choisi d'associer à un objet à réguler le premier de la liste de ceux-ci, un calculateur binaire. Un tel ensemble se révèle en effet particulièrement intéressant, car il s'introduit naturellement lorsque l'opération d'échantillonnage est contrôlée par un calculateur numérique "en ligne". Nous allons en conséquence examiner les performances que l'on peut attendre de l'utilisation d'un tel régime de régulation.

Au cours de ce chapitre, nous analyserons le cas d'un filtre à commande en premier ordre. Dans ce cas, les méthodes d'étude exposées aux chapitres deux et trois ne sont évidemment pas nécessaires. Après avoir effectué la mise en équation du système, nous étudierons la stabilité asymptotique des solutions de son équation de récurrence.

Une analyse de la limite du domaine de stabilité par rapport aux valeurs des variables conduira ensuite aux conditions de stabilité illimitée. Enfin, pour clore cette étude, le problème du temps de réponse sera également envisagé.

4.2. Description du calculateur

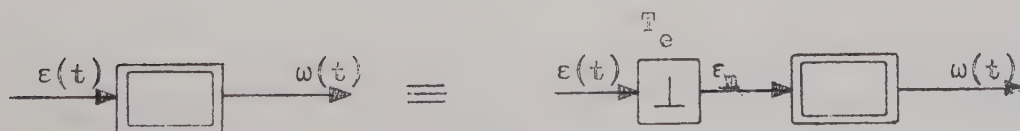
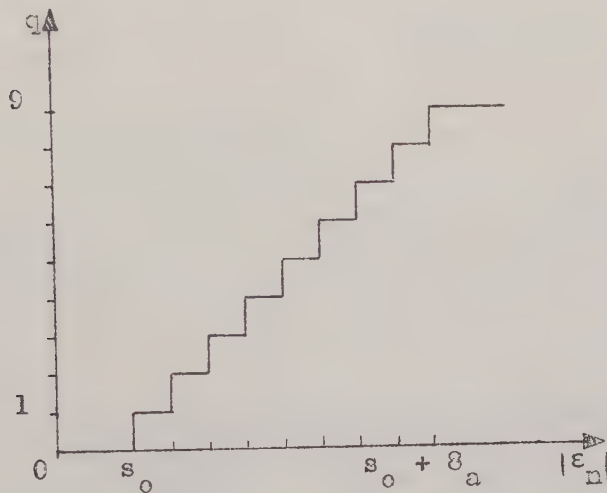


Figure 4.1.

On peut considérer (figure 4.1) que le modulateur est formé d'un échantillonneur de Dirac à période d'échantillonnage T_e constante et d'un organe non linéaire transformant selon un code binaire la valeur de son entrée quantifiée ε_n en une suite $w(t)$ composée de p_0 impulsions de hauteur A sigi. (ε_n), de largeur L , également réparties dans le temps à l'intérieur de la période d'échantillonnage. Le quantifieur de pas a comporte un seuil s_0 et une saturation. Dans cette étude nous choisirons, plus précisément, le code binaire décimal (figure 4.2), ce qui revient à dire que la saturation du quantifieur se produira pour $|\varepsilon_n| \geq s_0 + 8a$.



q	m_2	m_1	m_0
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	0	0	0
5	0	1	0
6	0	1	1
7	0	1	1
8	1	0	0
9	1	0	1

Figure 4.2.

Les quatre chiffres binaires (m_2, m_1, m_0) ($p_0 = 4$) sont attribués à chaque valeur de q selon le tableau donné figure 4.2. Les impulsions, régulièrement émise dans la période, ne peuvent commencer qu'aux temps $0, \frac{T_e}{4}, \frac{2T_e}{4}, \frac{3T_e}{4}$ comptés par rapport à l'instant d'échantillonnage. Enfin l'impulsion i n'existe que si $m_i = 1$.

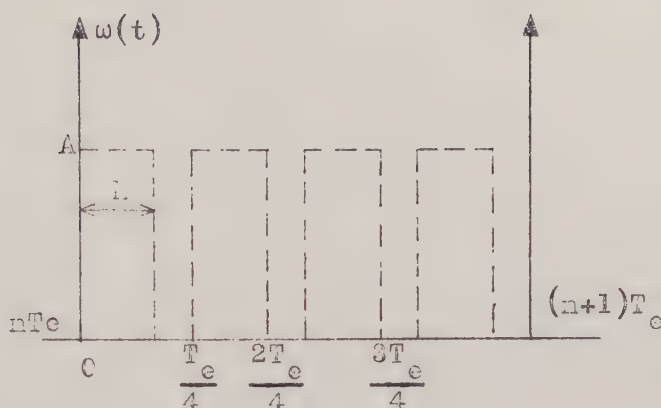


Figure 4.3.

4.3. Mise en équation

Le système asservi, à retour unitaire, comporte dans sa chaîne d'action le modulateur linéaire et une transmittance du premier ordre de constante de temps T (Figure 4.4.).

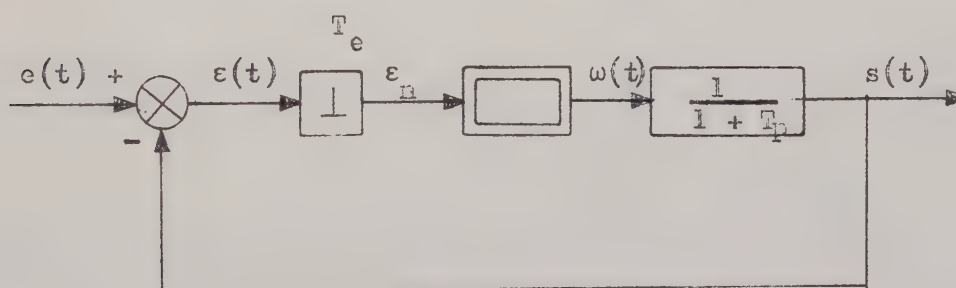


Figure 4.4.

L'équation de récurrence, liant les valeurs prises par une grandeur aux instants d'échantillonnage, constitue un outil mathématique particulière ment bien adapté à l'étude des systèmes asservis discrets non linéaires. C'est pourquoi nous allons déterminer la relation existant entre les valeurs successives du signal d'erreur $\epsilon(t)$.

Soit $s(nT_0) = s_n$ la valeur de la sortie du filtre à l'instant d'échantillonnage nT_0 . Cette sortie à l'instant $(n+1)T_0$ s'exprime par :

$$s_{n+1} = s_n e^{-T_0/T} + K(\epsilon_n)$$

$K(\epsilon_n)$ constituant la contribution de la régulation.

Le filtre étant linéaire, les effets de différentes impulsions s'ajoutent ; d'où :

$$K(\epsilon_n) = \sum_{i=0}^{\infty} n_i A (1 - e^{-\frac{h}{T}}) e^{-\frac{T_0 - (i \frac{T_0}{4} + T)}{T}} \text{sign}(\epsilon_n)$$

$$K(\epsilon_n) = A \text{sign}(\epsilon_n) \sum_{i=0}^{\infty} n_i e^{-\frac{T_0}{T}} (e^{\frac{h}{T}} - 1) e^{i \frac{T_0}{4T}}$$

En posant

$$e^{-\frac{T_0}{T}} = D \quad e^{\frac{h}{T}} = D_1$$

il vient

$$s_{n+1} = D s_n + A \text{sign}(\epsilon_n) \sum_{i=0}^{\infty} n_i D (D_1 - 1) e^{i \frac{T_0}{4T}} \quad (4.1)$$

Le fonctionnement de l'asservissement en chaîne fermée étant décrit par

$$\epsilon_n = e_n - s_n \quad (4.2)$$

l'équation de récurrence du système, étant les valeurs prises par l'erreur aux instants d'échantillonnage, s'écrit :

$$\epsilon_{n+1} = D \epsilon_n + A \text{sign}(\epsilon_n) \sum_{i=0}^{\infty} n_i D (D_1 - 1) e^{i \frac{T_0}{4T}} = e_{n+1} - D e_n \quad (4.3)$$

4.4. Etude de la stabilité asymptotique en régime autonome

Par suite du nombre important de paramètres caractérisant le système (amplitude et largeur des impulsions, seuil et pas de quantification, période d'échantillonnage, constante de temps du filtre), nous nous limiterons à l'étude du fonctionnement en régulateur.

Dans ces conditions, l'équation (4.3) devient :

$$\varepsilon_{n+1} = -\varepsilon_n - A \operatorname{sign}(\varepsilon_n) \sum_{i=0}^S a_i e^{i \frac{T_0}{4T}} \quad (4.3)$$

ou encore :

$$\varepsilon_{n+1} = \left(D - \frac{A}{|\varepsilon_n|} D(D_1 - 1) \sum_{i=0}^S a_i e^{i \frac{T_0}{4T}} \right) \varepsilon_n \quad (4.4)$$

4.4.1. Stabilité globale.

Une condition suffisante de stabilité asymptotique s'écrit :

$$\left| D - \frac{A}{|\varepsilon_n|} D(D_1 - 1) \sum_{i=0}^S a_i e^{i \frac{T_0}{4T}} \right| < 1 \quad (4.5)$$

Remarque : Dans le cas d'un système à premier ordre, cette condition est identique à celle, nécessaire et suffisante, des systèmes linéaires.

La relation (4.5) est équivalente à :

$$-1 < D - \frac{A}{|\varepsilon_n|} D(D_1 - 1) \sum_{i=0}^S a_i e^{i \frac{T_0}{4T}} < 1 \quad (4.6)$$

L'inégalité de droite étant toujours vérifiée (4.6) se réduit à :

$$\frac{A}{|\varepsilon_n|} D(D_1 - 1) \sum_{i=0}^S a_i e^{i \frac{T_0}{4T}} < 1 + D \quad (4.7)$$

Définissons les variables et paramètres réduits suivants :

$$x_n = \frac{\varepsilon_n}{s_0} \quad a' = \frac{a}{s_0} \quad T' = \frac{T}{T_e} \quad k = \frac{h}{T_e/4} \quad A' = \frac{A}{s_0}$$

La condition de stabilité asymptotique se met alors sous la forme :

$$A' \frac{C_1 - 1}{1 + D} < \frac{|x_n|}{\sum_{i=0}^{\infty} n_i e^{i/4T'}} \quad (4.8)$$

Les quatre paramètres réduits (constante de temps, largeur et amplitude des impulsions, pas de quantification) étant fixés, la relation (4.8) définit un domaine de stabilité asymptotique par rapport aux valeurs de la variable ε , appelée encore domaine de stabilité asymptotique globale. Les relations (4.4) et (4.3) montrent que la limite de ce domaine est caractérisée par $x_{n+1} = -x_n$ et que la zone de stabilité correspond à $x_{n+1} > -x_n$.

La figure 4.5 met en évidence une forme de la réponse $\varepsilon(t)$ pendant une période d'échantillonnage, pour un point $(A', |x_n|)$ situé à la limite du domaine de stabilité globale.

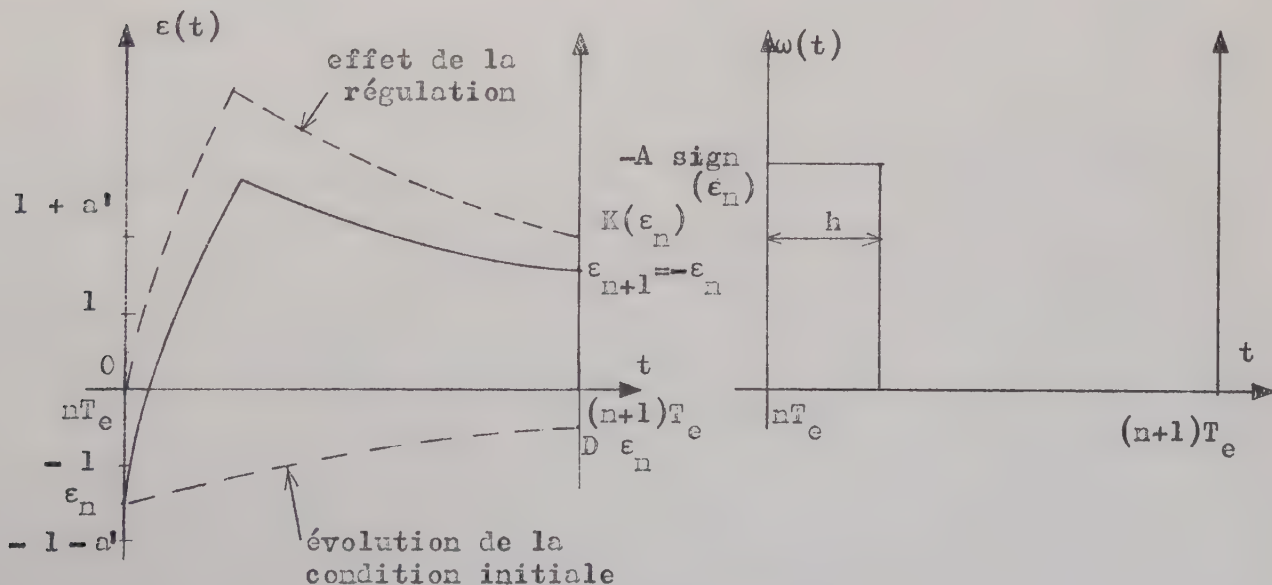


Figure 4.5.

La figure 4.3 représente une autre possible du domaine de stabilité globale.

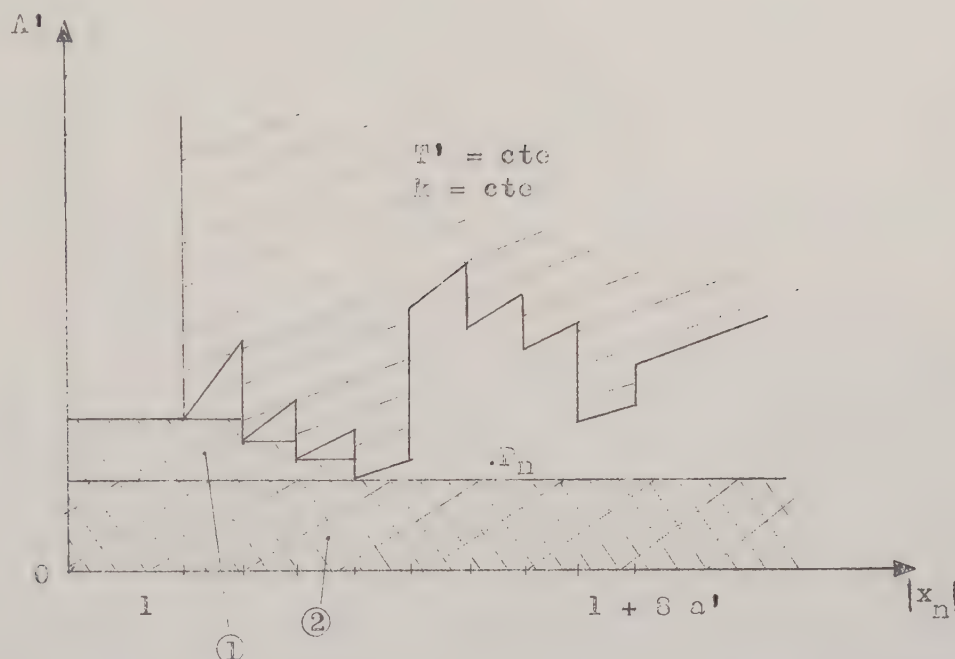


Figure 4.3.

En pratique, ce résultat n'est pas aisément exploitable, car rien ne permet d'affirmer que, pour A' fixé, le point F_n , représentatif de l'état du système aux instants d'échantillonnage, reste à l'intérieur du domaine de stabilité globale. Par contre, nous pouvons conclure que tout point intérieur au domaine ① tend vers la position d'équilibre $x = 0$. ① constitue un domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales. Toutefois ce n'est qu'un domaine suffisant car il existe probable-ment des points extérieurs à ①, tels que F_n , et qui pénètrent dans ① par un phénomène de saut. Nous serions donc amené, pour étendre ①, à rechercher son ou ses antécédents (19) ; ce problème n'est pas simple en général.

La stabilité illimitée, c'est-à-dire pour toute valeur de x_n , est une notion plus intéressante sur le plan pratique, que la stabilité globale. En effet la connaissance des conditions de stabilité illimitée permet de choisir les paramètres du système de façon que ce dernier évolue vers l'équilibre, quelles que soient les perturbations qui peuvent lui être appliquées.

Sur la figure 4.3, la région (2) constitue un tel domaine de stabilité illimitée.

4.4.2. Stabilité illimitée.

L. Rovy et J.L. Teulotte (20) ont présenté ces conditions, mais une approche différente de la leur peut être envisagée ; en effet, déterminer la valeur maximale de A' satisfaisant l'inégalité (4.3), les autres paramètres étant fixés, revient dans le plan $(A', |x_n|)$ à chercher pour quelle valeur de $|x_n| = 1 + (q - 1) a'$ ($q = 1, 2, \dots, 6$) la limite du domaine de stabilité globale atteint son minimum. Une analyse systématique de la limite de ce domaine a donc été entreprise (21) et permet de connaître la position du minimum en fonction des paramètres ; il est alors facile d'obtenir la condition de stabilité cherchée.

Les résultats de cette étude sont donnés ci-dessous, des indications plus précises se trouvant en Annexe.

Transformons d'abord la condition de stabilité asymptotique (4.3) en posant :

$$Y = \frac{A' D(D_1 - 1)}{1 + D} \quad \text{et} \quad \alpha = e^{1/4T}$$

Avec ces notations, la relation (4.3) s'écrit :

$$Y < \frac{|x_n|}{\sum_{i=0}^6 \frac{1}{\alpha^i}} \quad (4.3 \text{ bis})$$

$|x_n|$ pouvant varier de l'unité à l'infini, nous sommes conduit en réalité à examiner neuf inégalités distinctes :

$$\begin{aligned} Y < Y_1 &= 1 & \text{si} & \quad 1 < |x_n| < 1 + c' \\ Y < Y_2 &= \frac{1+c'}{u} & \text{si} & \quad 1 + c' < |x_n| < 1 + 2c' \\ Y < Y_3 &= \frac{1+2c'}{1+u} & & \quad 1 + 2c' < |x_n| \end{aligned}$$

L'emplacement du minimum ne dépendant que de c' et de u (c'est-à-dire de T'), une étude des diverses fonctions Y_i ($i = 1, \dots, 9$) permet de montrer qu'il existe seulement trois cas distincts selon les valeurs de u pour la courbe $\ln Y_i = f(c')$. La figure 4.7 résume l'ensemble de ces résultats.

Les valeurs caractéristiques de c' ($c'_{00}, c'_{01}, \dots$), dont les variations en fonction de u sont représentées figure 4.8, ont pour expression :

$$\begin{aligned} c'_{00} &= \frac{1}{u^3 - 7} & c'_{01} &= \frac{u^3 - 1}{7} & c'_{07} &= \frac{u^3 - u^2 - u}{2(-2u^3 + 4u^2 + 4u + 1)} \\ c'_{73} &= \frac{u^2}{2(-u^2 + 2u + 2)} & c'_{31} &= \frac{u}{2} \end{aligned}$$

Nous pouvons alors tracer les courbes $A' = f(u)$ avec c' comme paramètre (figure 4.9). L'influence de la largeur de l'impulsion est mise en évidence par le tracé de $A' = f(u)$ avec u comme paramètre (figure 4.10).

4.5. Etude du régime transitoire

Si la stabilité est une condition indispensable au bon fonctionnement d'un asservissement, la connaissance de la durée de sa réponse transitoire est d'un grand intérêt pratique. Donnons d'abord

STABILITE DU PREMIER ORDRE

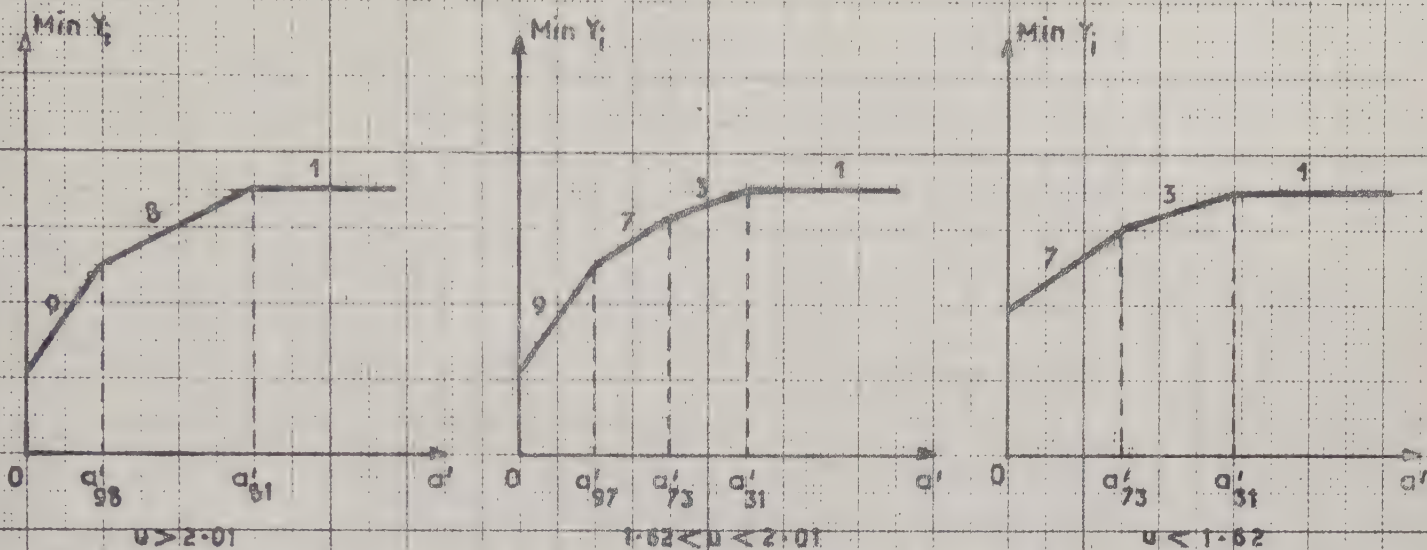


Figure 4-7

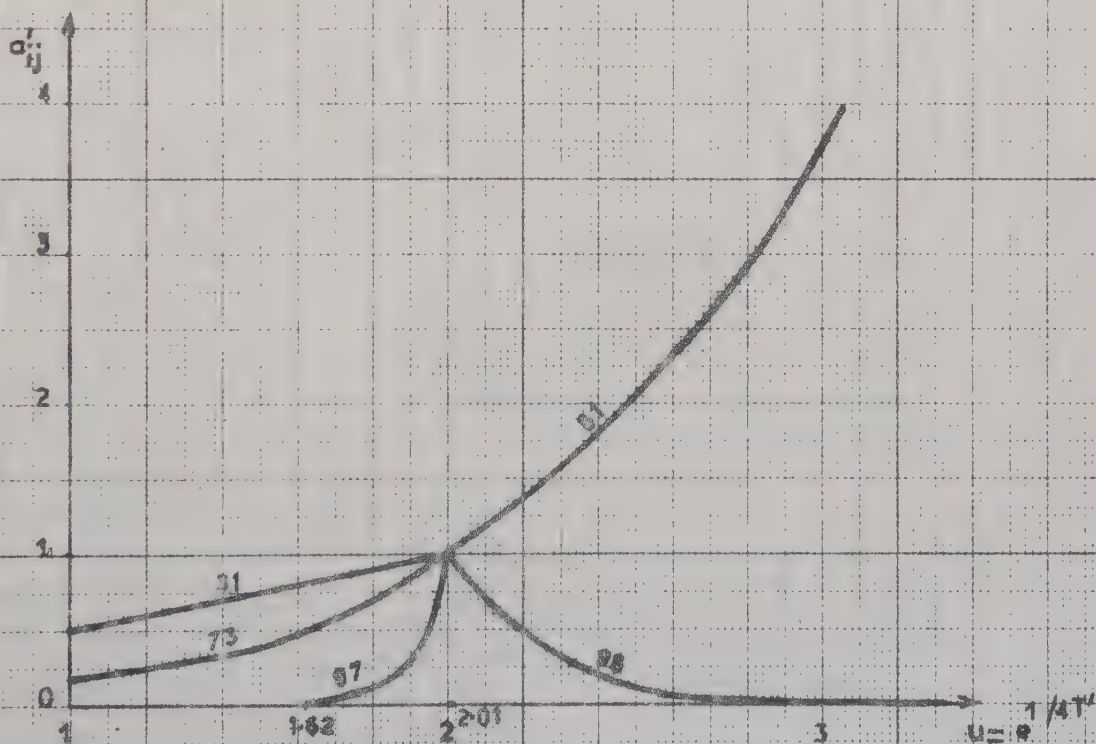


Figure 4-8

STABILITE ILLIMITEE

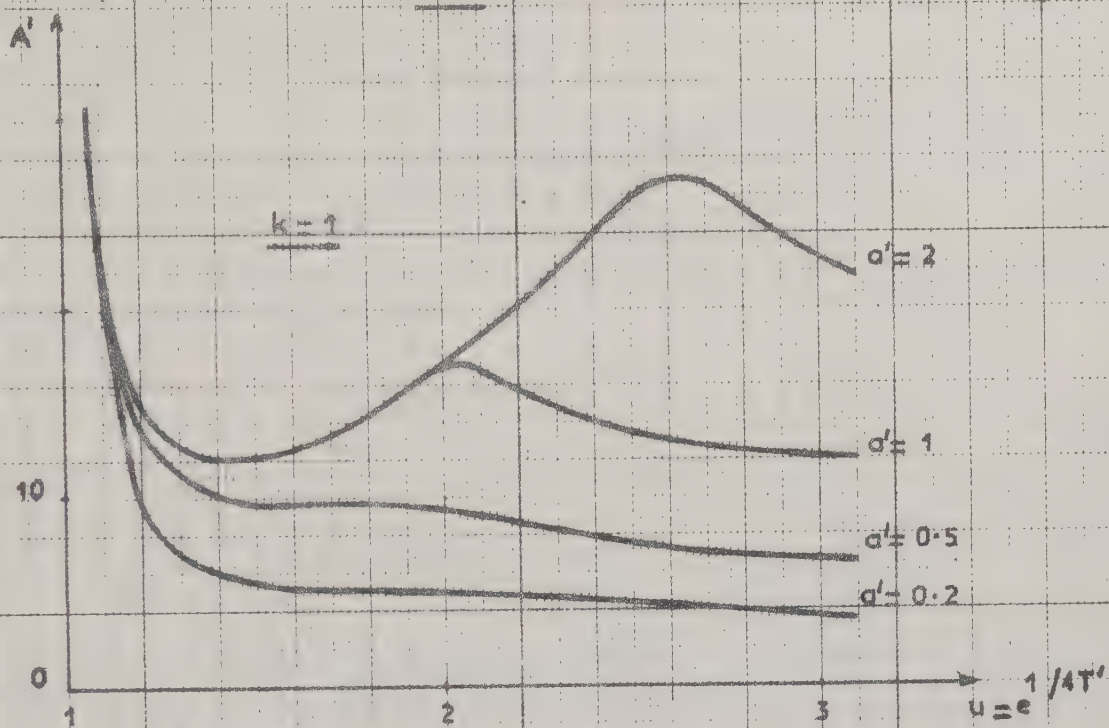


Figure 4-9

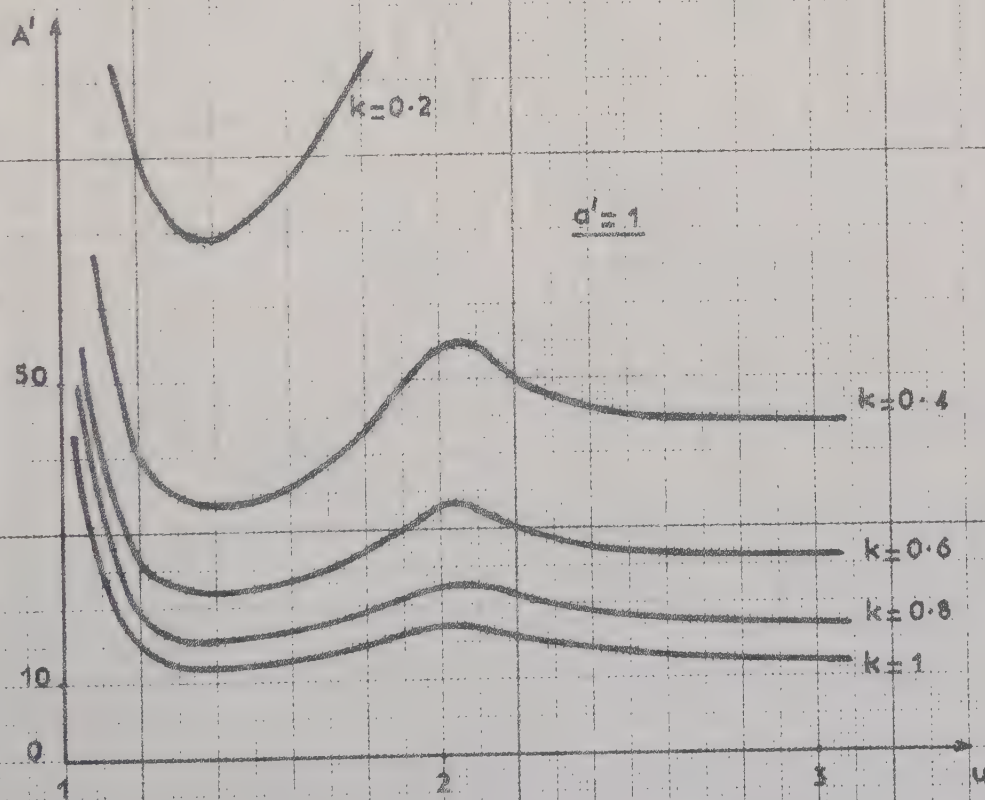


Figure 4-10

une définition du temps de réponse. Selon F. Vilal (10), le temps de réponse à $\beta\%$ d'un système échantillonné est le temps $\propto T_e$ ($\propto$, nombre de séquences d'échantillonnage) au bout duquel le système, sous des conditions initiales unitaires, atteint et ne s'écarte plus de sa position d'équilibre de $\pm \beta\%$.

La condition de stabilité asymptotique, pour un système du premier ordre, s'exprime par

$$|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$$

le temps de réponse à $\beta\%$ impose par conséquent que :

$$|\varepsilon_{n+1}| < \frac{1}{r} |\varepsilon_n| \quad \text{avec} \quad \frac{3}{100} r^\alpha > 1$$

L'unique condition de stabilité asymptotique (4.6) est alors remplacée par les deux inégalités suivantes :

$$A' < \frac{D + \frac{1}{r}}{D(D_1 - 1)} \quad \frac{|x_n|}{\sum_{i=0}^n a_i e^{i T_e / 4T}} \quad (4.9)$$

$$A' > \frac{D - \frac{1}{r}}{D(D_1 - 1)} \quad \frac{|x_n|}{\sum_{i=0}^n a_i e^{i T_e / 4T}} \quad (4.10)$$

Il convient alors de distinguer deux cas.

4.3.1. Premier cas : $D < \frac{1}{r}$

L'inégalité (4.10) étant remplie, seule la relation (4.9) doit être étudiée. Dans le plan $(A', |x_n|)$, la limite supérieure du domaine de temps de réponse est constituée par une courbe affine de la limite du domaine de stabilité globale (figure 4.11).

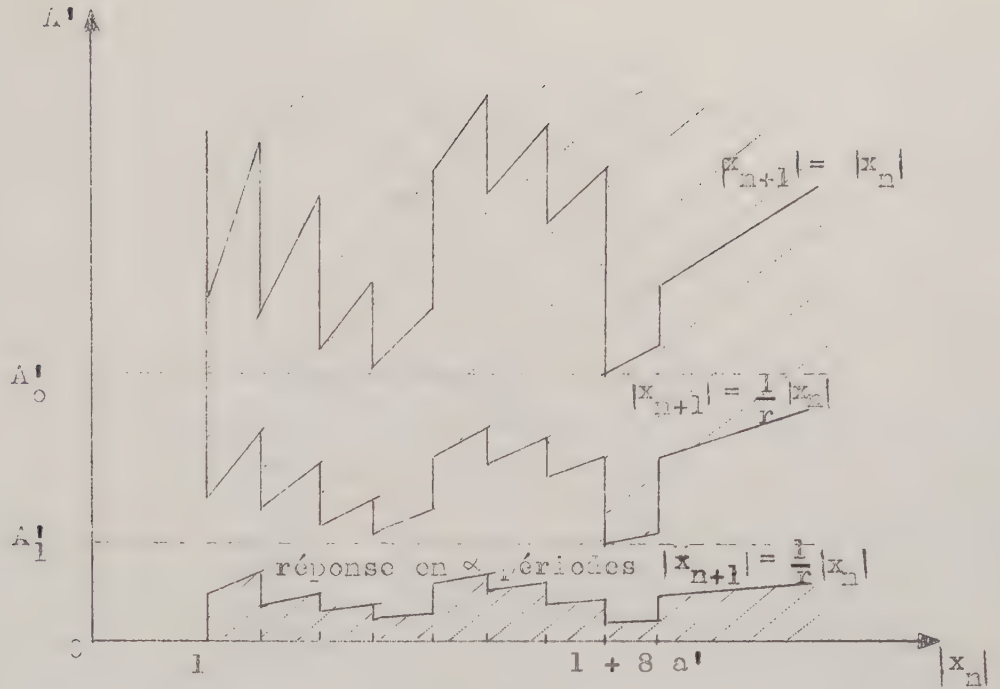


Figure 4.11.

La valeur maximale de A' assurant en temps de réponse en α périodes d'échantillonnage pour toute valeur de $|x_n|$ est $A'_1 = \frac{D + 1/r}{D + 1} A'_0$ et les résultats concernant les domaines de stabilité illimités dans le plan des paramètres demeurent valables en remplaçant A' par $\frac{1/r + D}{1 + D} A'_1$.

4.5.2. Second cas : $1 > \frac{1}{r}$

Les deux inégalités (4.9) et (4.10) sont conservées ; le domaine du temps de réponse fixé possède maintenant une limite supérieure et une limite inférieure, se réduisant toutes deux par affinité de la limite du domaine de stabilité globale. Il n'est plus possible d'assurer une réponse en α périodes pour toute valeur de $|x_n|$, la caractéristique correspondant à $x_{n+1} = \frac{1}{r} x_n$ coupant dans tous les cas l'horizontale $A' = A'_1$.

On définit alors un temps de réponse par rapport aux conditions initiales.

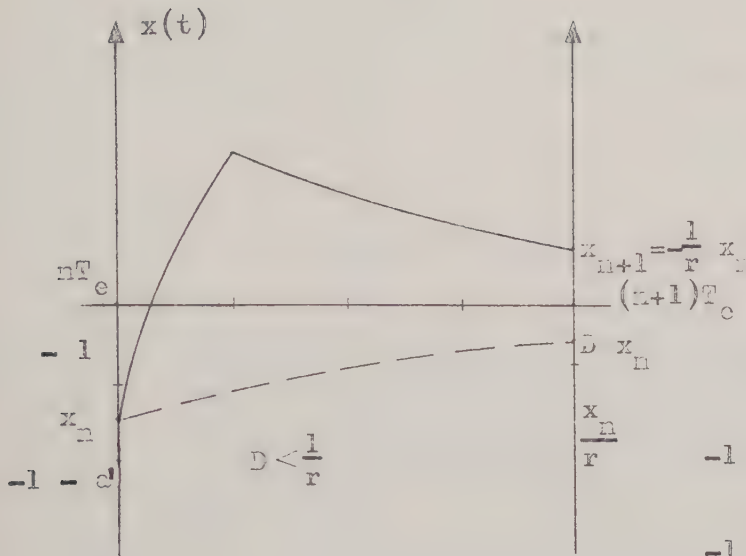


Figure 4.12 a

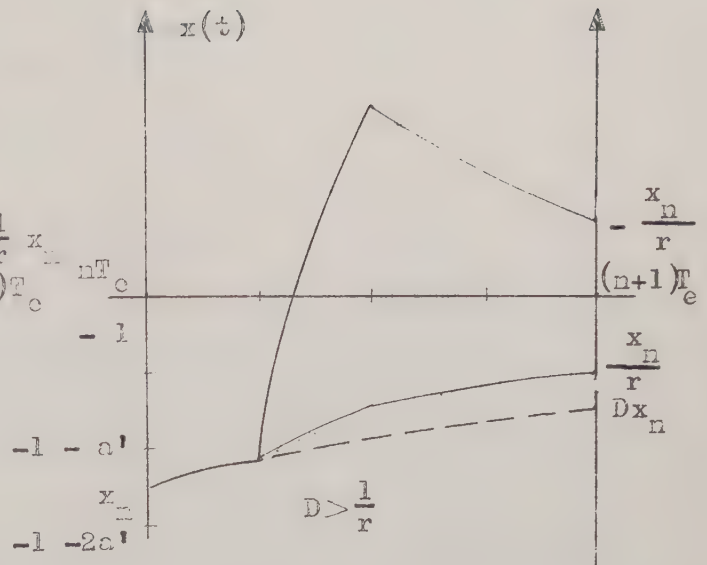


Figure 4.12 b

4.3. Comportement du système en présence d'une entrée constante.

Le fonctionnement du système est décrit par l'équation de récurrence (4.8) avec $\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = E$:

$$\varepsilon_{n+1} = D \varepsilon_n + A \operatorname{sign}(\varepsilon_n) \sum_{i=0}^{\infty} m_i D(D_1 - 1) e^{-i \frac{T_c}{4T}} = (1 - D)E \quad (4.11)$$

En coordonnées réduites, avec $E' = \frac{AE}{S_c}$ il vient :

$$x_{n+1} = D x_n + K(x_n) = (1 - D) E' \quad (4.12)$$

avec $K(x_n) = A' \operatorname{sign}(x_n) \sum_{i=0}^{\infty} m_i D(D_1 - 1) e^{-i \frac{T_c}{4T}}$

Il nous savons qu'en réponse à une entrée en échelon, les systèmes de classe zéro et à modulateur continu présentent une erreur constante en régime permanent. Par analogie nous définissons la solution x_p de (4.13) comme la valeur de x_n telle que

$$x_{n+1} = x_n = x_p, \text{ soit :}$$

$$(-1 + D) x_p + (1 - D) E' = E(x_p) \quad (4.13)$$

Remarque : Le comportement du système demeure oscillatoire lorsque la solution est atteinte. Toutefois il ne s'agit pas d'une instabilité. Ce phénomène est dû à la nature impulsionnelle du modulateur.

L'existence d'une solution à l'équation (4.13) ainsi que l'étude de sa stabilité peuvent être vus graphiquement (22).

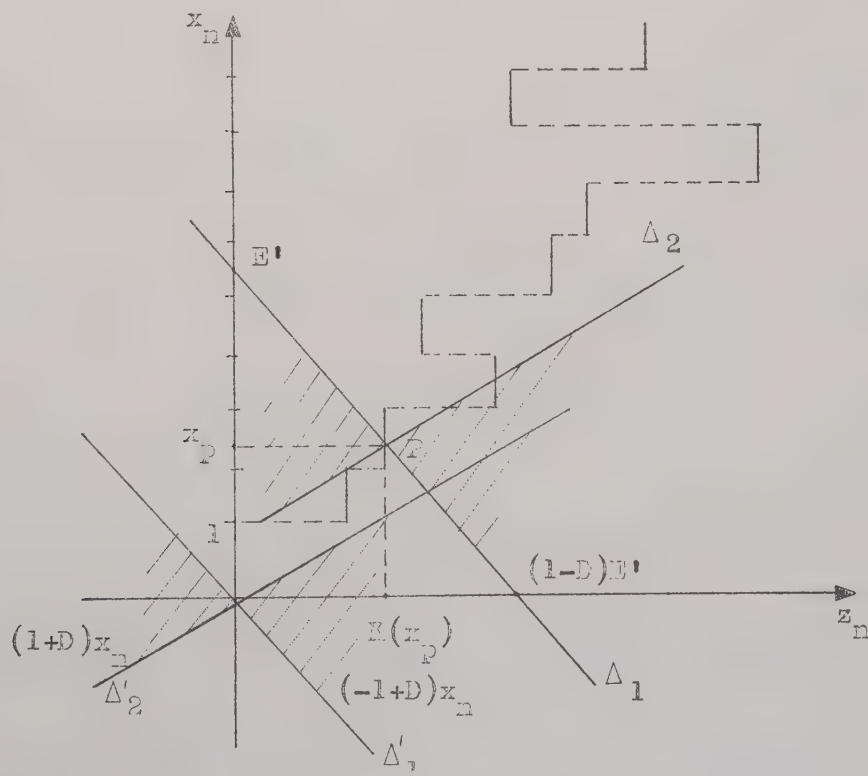


Figure 4.13

Tracons dans le plan (z, x) la contribution de la régulation $z = I(x)$ et la droite Δ_1 d'équation $z = -(1-D)x + (1-D)E'$. Lorsque E' varie, la droite Δ_1 de la figure 4.10 se déplace parallèlement à elle-même. Or la relation (4.11) ne peut être vérifiée que si Δ_1 coupe la caractéristique de régulation, ce qui, en raison de la quantification, ne se produit pas nécessairement. Dans le cas où il n'y a pas d'intersection une oscillation d'ordre inconnu apparaît.

Remarque : une solution périodique $x_{n+1} = -x_n$ ne peut évidemment pas exister si l'entrée E' n'est pas nulle.

Supposons qu'une solution $x_{n+1} = x_n$ existe ; elle est donnée par :

$$x_p = Dx_p - I(x_p) + (1-D)E' \quad (4.13)$$

Sous l'effet d'une perturbation x_n s'écarte de x_p

$$x_{n+1} = Dx_n - I(x_n) + (1-D)E' \quad (4.12)$$

La solution x_p est stable si l'écart $(x_n - x_p)$ tend asymptotiquement vers zéro. En retranchant membre à membre (4.12) et (4.13), nous obtenons :

$$(x_{n+1} - x_p) = D(x_n - x_p) - [I(x_n) - I(x_p)] \quad (4.14)$$

$$\text{Posons } x_n - x_p = x'_n \quad I(x_p) - I(x_p) = I'(x'_n)$$

Avec ces notations (12) s'écrit :

$$x'_{n+1} = D x'_n - I'(x'_n) = x'_n \left(D - \frac{I'(x'_n)}{x'_n} \right) \quad (4.15)$$

Une condition suffisante de stabilité asymptotique s'écrit :

$$\left| D - \frac{I'(x'_n)}{x'_n} \right| < 1 \quad (4.16)$$

soit encore

$$(-1 + D) x_n^1 < T(x_n^1) < (1 + D) x_n^1$$

Pour que la solution x_p soit stable, il faut que la caractéristique de la régulation soit située à l'extérieur des zones hachurées définies par les droites Δ_1 et Δ_2 .

Même dans le cas où les paramètres sont tels que le système en régulateur possède la stabilité illimitée (ce qui est réalisé sur la figure 4.18), nous ne pouvons affirmer que la solution $x_{n+1} = x_n$, si elle existe, est stable.

4.7. Conclusion.

L'utilisation des notions de stabilité asymptotique a permis d'obtenir, dans l'espace des paramètres, des domaines où la stabilité illimitée est assurée au système en régime autonome. Par contre, il est impossible de garantir la stabilité pour un fonctionnement à entrée constante, puisque, selon la valeur de l'entrée, il y a ou non existence d'une oscillation. Dans ces conditions, le modulateur binaire, ou plus généralement tout modulateur à caractéristique discontinue, paraît mal adapté à la commande d'un objet du premier ordre, sauf dans le cas particulier du fonctionnement en régulateur.

CHAPITRE 8

STABILITE D'UN ASSERVISSEMENT COMPORTANT UN REGULATEUR BINAIRE ET UN OBJET DU SECOND ORDRE

8.1. Introduction

Nous allons, dans ce chapitre, analyser la stabilité d'un système asservi possédant un régulateur binaire et un filtre linéaire du second ordre avec intégration. Après avoir obtenu les équations régissant l'état du système, nous appliquerons les notions de distance et de contraction d'un opérateur à la détermination des domaines de stabilité par rapport aux conditions initiales. Dans le cas où la stabilité illimitée est assurée, les conditions à vérifier seront visualisées par des domaines présentés dans l'espace des paramètres.

8.2. Mise en équation du système

Le schéma bloc du système est représenté figure 8.1.

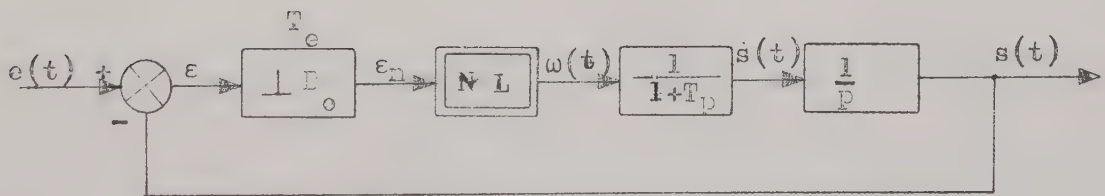


Figure 8.1.

La disposition des impulsions, grandeur de commande $w(t)$ du filtre à l'intérieur d'une période d'échantillonnage, est représentée Figure 5.2.

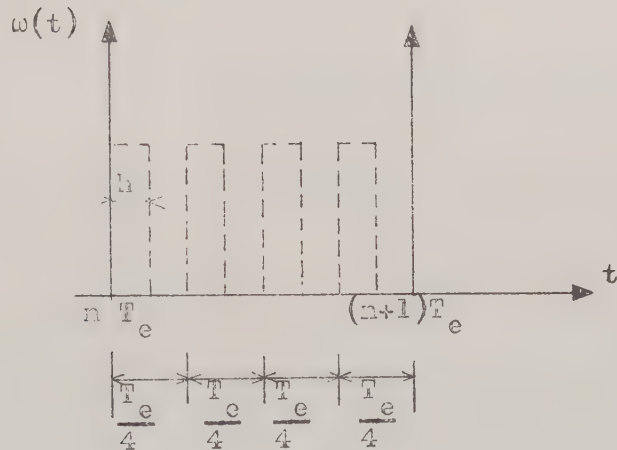


Figure 5.2.

À l'instant d'échantillonnage nT_e , les conditions initiales du filtre sont s_n et $\dot{s}_n$ et nous pouvons écrire :

$$\dot{s}_{n+1} = \dot{s}_n e^{-T_c/T} + X(\epsilon_n)$$

avec

$$X(\epsilon_n) = A \operatorname{sign}(\epsilon_n) \sum_{i=0}^c a_i e^{-T_c/T} (e^{h/T} - 1) e^{i T_c/4T}$$

Poseons

$$e^{-T_c/T} = D \quad e^{h/T} = D_1$$

d'où

$$\dot{s}_{n+1} = D \dot{s}_n + A \operatorname{sign}(\epsilon_n) \sum_{i=0}^c a_i D (D_1 - 1) e^{i T_c/4T} \quad (5.1)$$

Pour obtenir l'expression de la sortie s , il faut tenir compte de la variation de $\dot{s}$ au cours de la période.

Or pour

$$i \frac{T_e}{4} < t < i \frac{T_e}{4} + h$$

l'effet de la régulation dû à l'impulsion i (voir figure 5.3) est :

$$n_i A \operatorname{sign} (\varepsilon_n) (1 - e^{-t'/T})$$

avec $t' = t - i \frac{T_e}{4}$

et pour $i \frac{T_e}{4} + h < t < T_e$

$$n_i A \operatorname{sign} (\varepsilon_n) (1 - e^{-h/T}) e^{-t''/T}$$

avec $t'' = t - (\frac{T_e}{4} + h)$

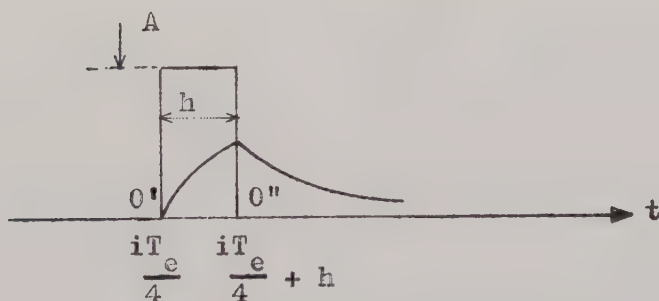


Figure 5.3.

On a obtenu par intégration :

$$s_{n+1} = s_n + T(1 - e^{-\frac{T}{m}}) \dot{s}_n + A \operatorname{sign}(\varepsilon_n) \sum_{i=0}^c c_i \left[D + T(e^{-\frac{h}{T}} - 1) + \dots \right. \\ \left. + T(1 - e^{-\frac{h}{T}}) \left(1 - e^{-\frac{T_c - (\frac{h}{4} + 1)}{T}} \right) \right]$$

soit encore

$$s_{n+1} = s_n + T(1 - D) \dot{s}_n + A \operatorname{sign}(\varepsilon_n) \sum_{i=0}^c c_i \left[h - TD(D_1 - 1) e^{i \frac{T_c}{4T}} \right] \quad (5.2)$$

5.2.1. Forme normale notarielle.

Le fonctionnement en boucle fermée est caractérisé par la relation :

$$\varepsilon_n = s_n - s_L \quad (5.3)$$

Les relations (5.1) (5.2) et (5.3) conduisent aisément à l'équation de récurrence régissant le système bouclé :

$$\varepsilon_{n+2} = (D + c_{n+2}) \varepsilon_{n+1} + \left[D c_n - T(1 - D) c_n \right] \varepsilon_n = \varepsilon_{n+2} - (1+D) \varepsilon_{n+1} + D c_n \quad (5.4)$$

avec

$$\begin{cases} c_n = 1 - \frac{A}{|\varepsilon_n|} \sum_{i=0}^c c_i \left[h - TD(D_1 - 1) e^{i \frac{T_c}{4T}} \right] \\ c_n = - \frac{A}{|\varepsilon_n|} \sum_{i=0}^c c_i D(D_1 - 1) e^{i \frac{T_c}{4T}} \end{cases}$$

La présence dans a_n et c_n des coefficients a_i , fonctions implicites de a , rend difficile l'étude de la stabilité à partir de l'équation caractéristique. Il convient alors d'établir une mise sous forme simplifiée des équations régissant le système, dont l'exploitation se révélera plus aisée par la suite.

5.2.2. Forme simplifiée.

Afin de réduire le nombre de paramètres, choisissons comme variables et paramètres réduits :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{x}{s_c} & y_n &= \frac{y}{s_c} \\ x'_n &= \frac{x'}{s_c} & T' &= \frac{T}{T_c} \\ z_n &= \frac{z}{T_c} & A' &= \frac{A}{s_c} \cdot \frac{T_c}{Z} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Le fonctionnement de l'asservissement en régulateur (entrée nulle ou constante) est alors décrit par le système d'équations :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_n + b_n y_n \\ y_{n+1} = c_n x_n + d_n y_n \end{cases} \quad (5.6)$$

$$a_n = 1 - \frac{A'}{|x_n|} \sum_{i=0}^3 a_i \left[1 - 4 T' e^{-1/T'} (e^{k/4T'} - 1) e^{i/4T'} \right] \quad (5.7)$$

$$b_n = 1 - e^{-1/T'}$$

avec

$$c_n = - \frac{A'}{|x_n|} \sum_{i=0}^3 u_i 4 T' e^{-1/T'} (e^{k/4T'} - 1) e^{i/4T'} \quad (5.7)$$

$$d_n = e^{-1/T'}$$

Quatre paramètres indépendants en notations réduites, influencent le comportement de ce système : a' pas de quantification, A' gain, k largeur des impulsions, T' constante de temps.

Ce nombre important de paramètres, caractéristique des systèmes quantifiés en général constitue une des difficultés de l'étude.

5.3. Choix d'une distance

L'analyse du comportement du système, à partir d'un point $P_n(x_n, y_n)$ représentatif de l'état du système à l'instant n et tel que $|x_n| < 1$, donne une indication sur le choix d'une distance du point P_n à l'origine.

En effet, lorsque la variable x_n appartient au seuil, il n'y a pas de régulation. Le conséquent P_{n+1} de P_n de coordonnées :

$$x_{n+1} = x_n + (1 - D) y_n$$

$$y_{n+1} = D y_n$$

est tel que :

$$x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n$$

Le système évolue donc, en régime libre, suivant des droites parallèles à la seconde bissectrice du plan de phase réduit, comme le montre la figure 5.4.

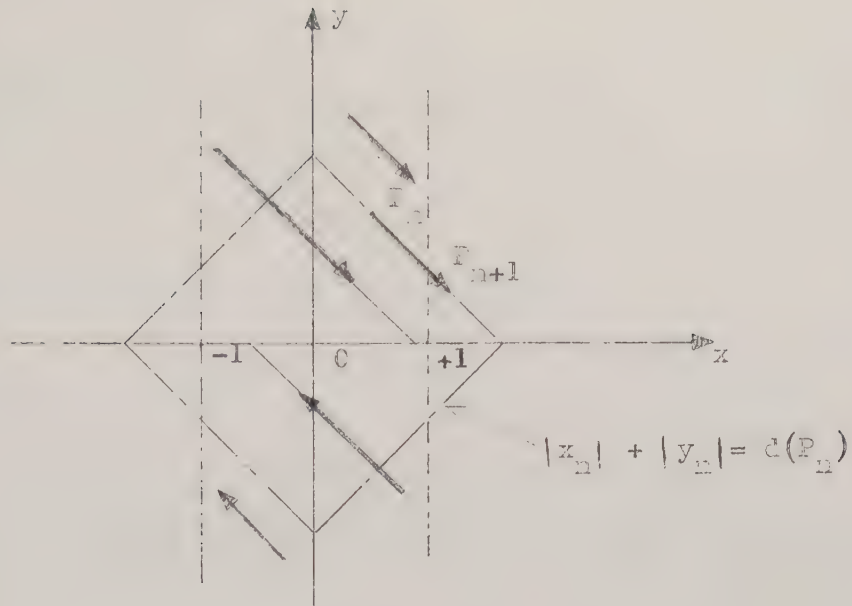


Figure 5.4.

En se laissant guider par cette propriété nous sommes amené à choisir comme distance du point P_n à l'origine la somme des valeurs absolues des composantes du vecteur d'état :

$$d(P_n, 0) = d(P_n) = |x_n| + |y_n| \quad (5.8)$$

Cette distance (vérifiant les axiomes de la métrique), très classique, paraît cependant bien adaptée au cas où le filtre du second ordre possède une intégration.

5.4. Mise en oeuvre de la méthode

Exprimons tout d'abord que la différence est, compte tenu de (5.8) négative :

$$d(P_{n+1}) - d(P_n) = |a_n x_n + (1-D) y_n| + |c_n x_n + D y_n| - |x_n| - |y_n|$$

$$d(P_{n+1}) - d(P_n) \leq (|a_n| + |c_n| - 1) |x_n|$$

Une condition suffisante pour que le système soit stable est que :

$$|a_n| + |c_n| < 1, \quad (5.9)$$

c_n étant toujours négatif (voir 5.7), il faut que :

$$-(1 + c_n) < a_n < 1 + c_n \quad (5.10)$$

5.4.1. Stabilité par rapport aux conditions initiales .

Remplaçant a_n et c_n par leurs valeurs données par (5.7) nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^3 n_i 3^{T'} e^{-1/T'} \left(e^{\frac{k}{4T'}} - 1 \right) e^{\frac{i}{4T'}} < \sum_{i=0}^3 n_i k \quad (5.11)$$

$$\sum_{i=0}^3 n_i k < 2 \frac{|x_n|}{A'} \quad (5.12)$$

- La figure 5.4. montre clairement que si la variable x_n appartient au seuil ($|x_n| < 1$) :

$$x_n > 0 \text{ et } y_n > 0 \text{ ou } x_n < 0 \text{ et } y_n < 0 \Rightarrow d(P_{n+1}) - d(P_n) = 0 \quad (a)$$

$$x_n > 0 \text{ et } y_n < 0 \text{ ou } x_n < 0 \text{ et } y_n > 0 \Rightarrow d(P_{n+1}) - d(P_n) = 0 \quad (b)$$

D'après le résultat présenté en 2.3.2., la relation

$$d(P_{n+1}) \leq \alpha d(P_n) \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (5.13)$$

est une condition suffisante pour que la suite $d(P_n, E)$ tende vers zéro. Rappelons que E est l'ensemble des positions d'équilibre, c'est-à-dire ici :

$$E = \{(x, y) : y = 0 \quad -1 < x < 1\}$$

La condition (5.13) n'étant pas satisfaite dans le cas (a), nous devons examiner directement la suite $d(P_n, E)$. La figure 5.5. montre alors que l'inégalité

$$d(P_{n+1}, E) < d(P_n, E) \quad (5.14)$$

est encore vérifiée.

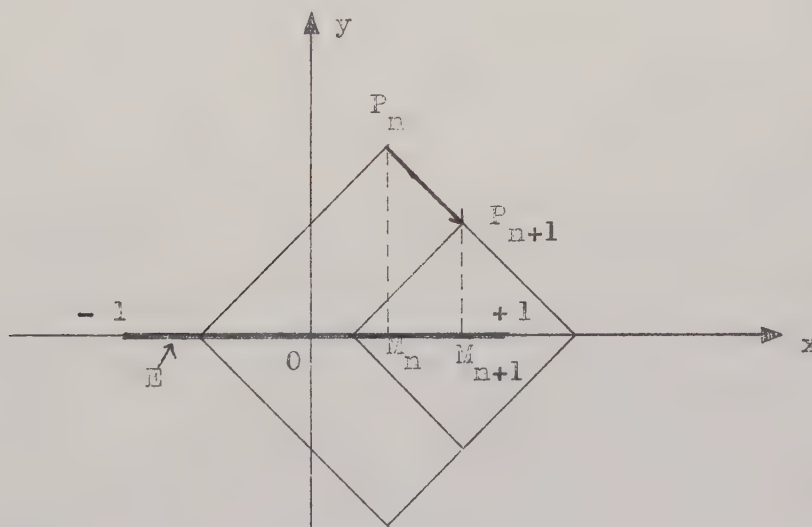


Figure 5.5.

En effet la distance

$$d(P_n, E) = \inf_{M_i \in E} d(P_n, M_i)$$

est représentée par la longueur du segment $P_n M_n$, tandis que $d(P_{n+1}, E)$ l'est par celle du segment $P_{n+1} M_{n+1}$.

- Il convient maintenant d'analyser à l'extérieur du seuil le signe de $d(P_{n+1}) - d(P_n)$, c'est-à-dire d'étudier les conditions (5.11) et (5.12) pour $|x_n| > 1$. La présence de la quantification impose de mener la discussion pas à pas. Supposons d'abord que :

$$1 \leq x_n < 1 + a' \quad (5.15)$$

L'utilisation pour la quantification du code binaire naturel conduit à :

$$n_0 = 1 \quad n_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

(5.11) et (5.12) s'écrivent alors, en tenant compte de (5.15) :

$$2 T' e^{-1/T'} \left(e^{\frac{k}{4T'}} - 1 \right) e^{\frac{i}{4T'}} < k \quad (5.11 \text{ bis})$$

$$k A' < 2 \quad (5.12 \text{ bis})$$

Ces deux conditions permettent de choisir les valeurs de k , T' et A' assurant $d(P_{n+1}) - d(P_n) < 0$ pour $1 \leq |x_n| < 1 + a'$. Si nous désirons étendre cette région à $1 \leq |x_n| < 1 + q a'$ ($1 \leq q \leq 8$), nous sommes amené à vérifier simultanément l'ensemble des $2 q$ relations déduites de (5.11) et (5.12). La discussion se fait de la façon suivante :

Traitant d'abord les conditions du type (5.11), considérons les deux premières inégalités correspondant à :

$$1 \leq |x_n| < 1 + a' \quad \text{et} \quad 1 + a' \leq |x_n| < 1 + 2 a'$$

Retenant l'inégalité la plus stricte, comparons la ensuite éventuellement à celle correspondant à

$$1 + 2 a' \leq |x_n| < 1 + 3 a'$$

La discussion se poursuit aisément par itération et nous procédons de même avec les conditions de type (5.12). Finalement nous obtenons les conditions à vérifier par les paramètres k , T' , A' et a' pour que $d(P_{n+1}) - d(P_n)$ soit négatif lorsque $1 \leq |x_n| < 1 + q a'$.

La figure 5.6 résume l'ensemble de la discussion précédente ; trois régions sont mises en évidence :

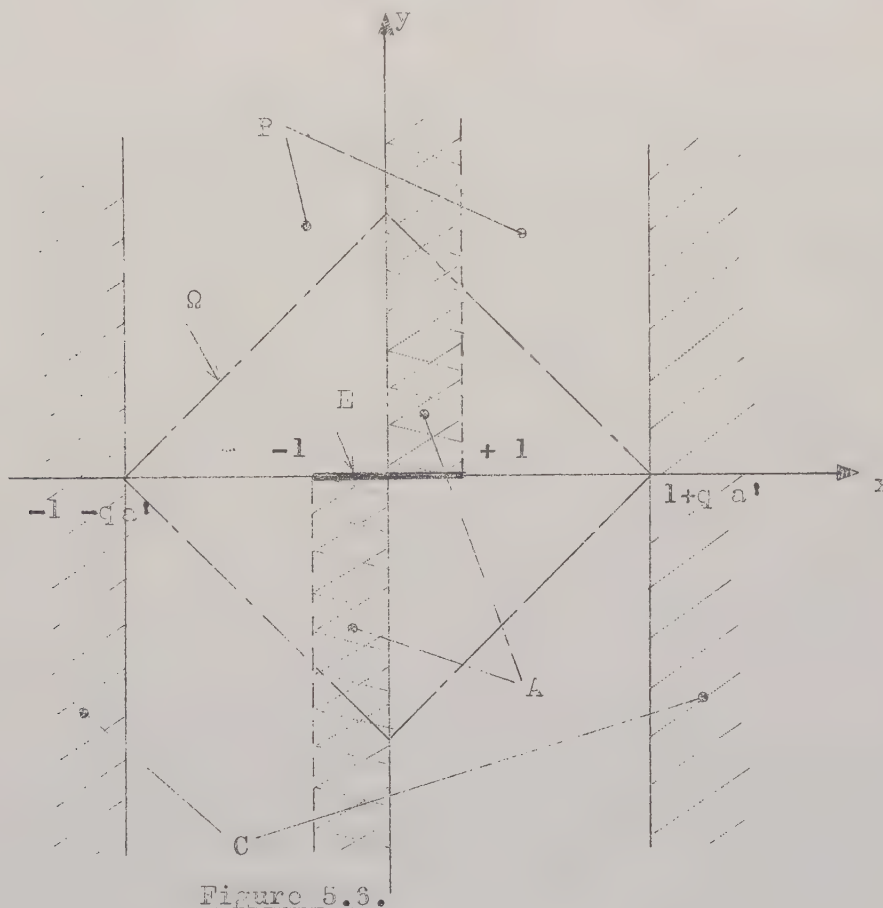


Figure 5.3.

Région A : $d(P_{n+1}) = d(P_n)$ et $d(P_{n+1}, E) < d(P_n, E)$

Région B : $d(P_{n+1}) < d(P_n)$

Région C : $d(P_{n+1}) > d(P_n)$

Soit Ω la plus grande surface isodistance inscrite dans A_0B , les distances étant repérées par rapport à l'origine 0.

Les résultats présentés au chapitre deux (en particulier 2.3.2.) permettent de conclure que toute solution du système (5.6) intérieure à Ω converge vers E.

Le domaine Ω constitue alors un domaine suffisant de stabilité par rapport aux conditions initiales. Si nous désirons, par exemple, obtenir un domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales tel que $q = 5$, les paramètres doivent être choisis de façon que (voir Annexe 2):

$$\begin{cases} kA' < 2 & \text{si } a' > \frac{1}{2} \\ kA' < 1 + 2a' & \text{si } a' < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5.16)$$

et

$$8T' e^{-1/T'} \left(e^{\frac{k}{4T'}} - 1 \right) e^{\frac{2}{4T'}} < k \quad (5.17)$$

5.4.2. Stabilité illimitée.

Le modulateur d'impulsions présentant une saturation pour $|x_n| > 1 + 8a'$, la stabilité illimitée est obtenue si les inégalités (5.11) et (5.12) sont vérifiées pour toutes les valeurs de q , c'est-à-dire pour toutes les valeurs des variables binaires m_i ($q = 1, 2, \dots, 9$).

En utilisant la même méthode que précédemment, nous aboutissons après une suite de calculs, dont le détail est donné en Annexe, aux conditions suffisantes de stabilité illimitée :

$$\left\{ \begin{array}{ll} k < \frac{2}{A'} & \text{si } a' > \frac{1}{2} \\ k < \frac{1}{A'} + \frac{2a'}{A'} & \text{si } \frac{1}{3} < a' < \frac{1}{2} \\ k < \frac{2}{3A'} + \frac{4a'}{A'} & \text{si } a' < \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad (5.18)$$

et

$$8 T' e^{-\frac{1}{T'}} , \frac{k}{4T'} , \frac{3}{4T'} < k \quad (5.19)$$

En posant $u = \frac{1}{4T'}$, l'inégalité (5.19) peut s'écrire

$$\frac{e^u}{2} > \frac{e^{ku} - 1}{ku} \quad (5.20)$$

Pour une valeur de k fixée, u est déterminé graphiquement à l'aide de (5.20). Dans le plan (z, u) l'intersection des courbes $\frac{e^u}{2}$ et $\frac{e^{ku} - 1}{ku}$ fournit la valeur limite de u correspondant à $k = 1$. La fonction $\frac{e^{ku} - 1}{ku}$ se déduisant de $\frac{e^u - 1}{u}$ par une affinité parallèle à l'axe des u , il est aisé d'obtenir, pour diverses valeurs de $k(0 \leq k \leq 1)$, la valeur limite de u .

Les conditions (5.18) et (5.19) définissent respectivement dans les plans (k, T') et (kA', a') des domaines (zones non hachurées figure 5.7) à l'intérieur desquels le choix des paramètres assure la stabilité illimitée au système.

STABILITE ILLIMITEE

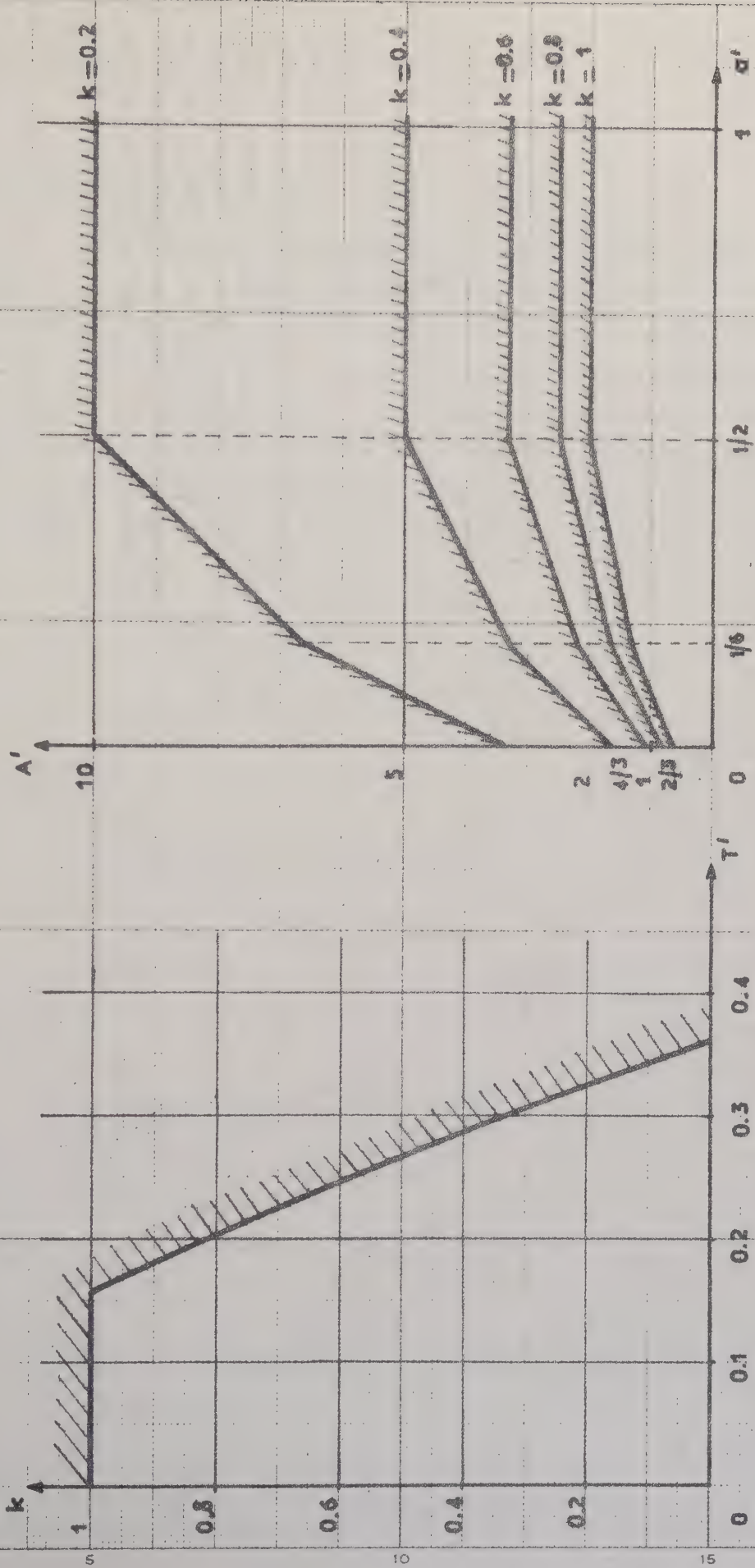


Figure 5-7

5.5. Conclusion.

L'utilisation de la notion de distance d'un point à un ensemble dans un espace métrique complet, a permis au cours de ce chapitre d'obtenir des domaines de stabilité par rapport aux conditions initiales, pour un asservissement discret non linéaire possédant un ensemble de positions d'équilibre. Il convient de remarquer que la norme utilisée, particulièrement bien adaptée au cas du moteur, permet simplement d'étudier la stabilité d'un système comportant n'importe quel modulateur d'impulsions quantifié à période constante.

CHAPITRE 3

RÉGIME DYNAMIQUE D'UN ASSERVISSEMENT COMPORTANT UN MODULATEUR BINAIRE ET UN OBJET DU SECOND ORDRE

3.1. Introduction:

Si la stabilité est une condition indispensable au bon fonctionnement d'un asservissement, la connaissance de son temps de réponse est d'une grande importance pratique. Aussi allons-nous aborder dans ce chapitre le problème du régime transitoire d'un asservissement comportant un modulateur binaire et un objet statique du second ordre. Dans ce but, nous appliquerons d'une part la notion de distance dans un espace de Banach, grâce à laquelle l'analyse de la stabilité a été faite au chapitre précédent, et d'autre part la méthode d'état proposée au chapitre trois qui conduit à une absence de dépassement lors du régime transitoire.

3.2. Application de la notion de distance à la détermination du temps de réponse

3.2.1. Principe de la méthode.

Supposons les paramètres du système tels que, pour $|x_n| > 1$ (existence de la régulation), la condition suivante soit vérifiée :

$$d(x_{n+1}) \leq \alpha d(x_n) \quad \alpha = \text{cte} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.1)$$

Supposons de plus que le nombre de périodes nécessaires à la traversée du seuil (en régime libre) puisse être majoré par l'entier q .

Définissons alors le temps de réponse comme le nombre r de périodes d'échantillonnage au bout duquel l'état du système appartient au domaine D_0 (voir figure 6.1) défini par :

$$D_0 = \left\{ x : d(x) \leq x_0, \quad x_0 > 1 \right\}$$

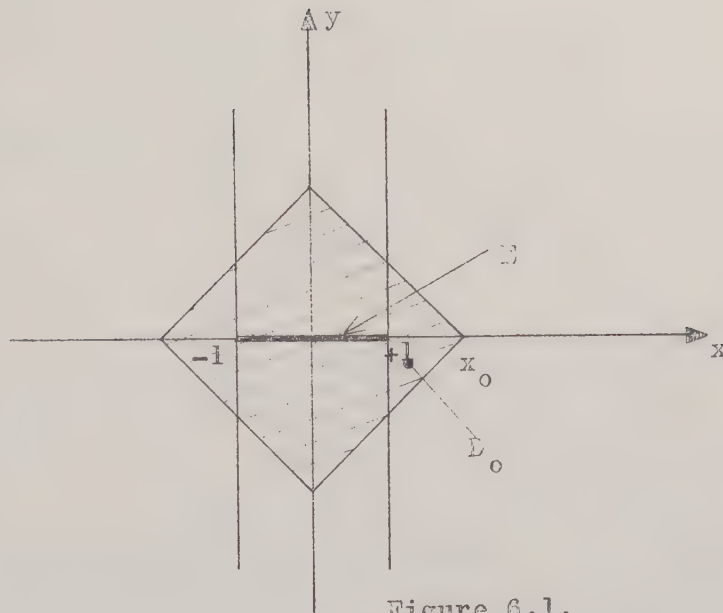


Figure 6.1.

Soit r_0 la valeur que prendrait r si la condition (6.1) était satisfaite dans tout l'espace ; dans ces conditions il est facile de montrer que ce nombre r de périodes d'échantillonnage est tel que :

$$r \leq r_0 (1 + q) \quad (6.2)$$

3.2.2. mise en oeuvre.

Conservons la même distance que lors de l'étude de la stabilité :

$$d(x_n) = |x_n| + |y_n|$$

Compte-tenu de l'équation du système, la relation (6.1) peut s'écrire :

$$(|c_n| + |c_n| - \alpha) |x_n| + (1 - \alpha) |y_n| < 0 \quad (6.3)$$

Il convient de remarquer que la condition (6.1) ne peut être satisfaite que dans un domaine limité par suite de l'existence d'une saturation. Admettons donc qu'elle est vérifiée dans un domaine D'_0 défini par :

$$|x_n| + |y_n| \leq x'_0 \quad (x'_0 > 0)$$

Il est alors nécessaire que :

$$(|c_n| + |c_n| - \alpha) |x_n| + (1 - \alpha) (x'_0 - |x_n|) < 0 \quad (6.4)$$

ce qui s'écrit encore :

$$(|c_n| + |c_n| - 1) |x_n| + (1 - \alpha) x'_0 < 0$$

En supposant

$$|x_n| + |c_n| < 1 - \beta \quad \beta > 0 \quad (6.6)$$

une condition suffisante (puisque $|x_n|$ est supérieur à l'unité) pour que (6.1) soit vérifiée dans D'_0 , région du seuil exclue, est :

$$-\beta + (1 - \alpha) x'_0 < 0 \quad (6.7)$$

6.2.3. Exemple.

Les paramètres du système, choisis de manière à assurer la stabilité illimitée, ont les valeurs suivantes :

$$L = 0,2 \quad a' = 0,15 \quad A' = 5 \quad T' = 0,2$$

L'examen de la condition (6.3) est facilité par le tracé de la caractéristique de la non-linéarité dans le plan (c_n, c_n) (voir figure 3.2).

Prenant une valeur de β , l'étude graphique de (6.6) permet d'obtenir la valeur limite de x'_0 ; l'inégalité (6.7) donne alors la valeur de α . La valeur $\beta = 0,41$ conduit à $x'_0 = 2,05$ et $\alpha = 0,5$.

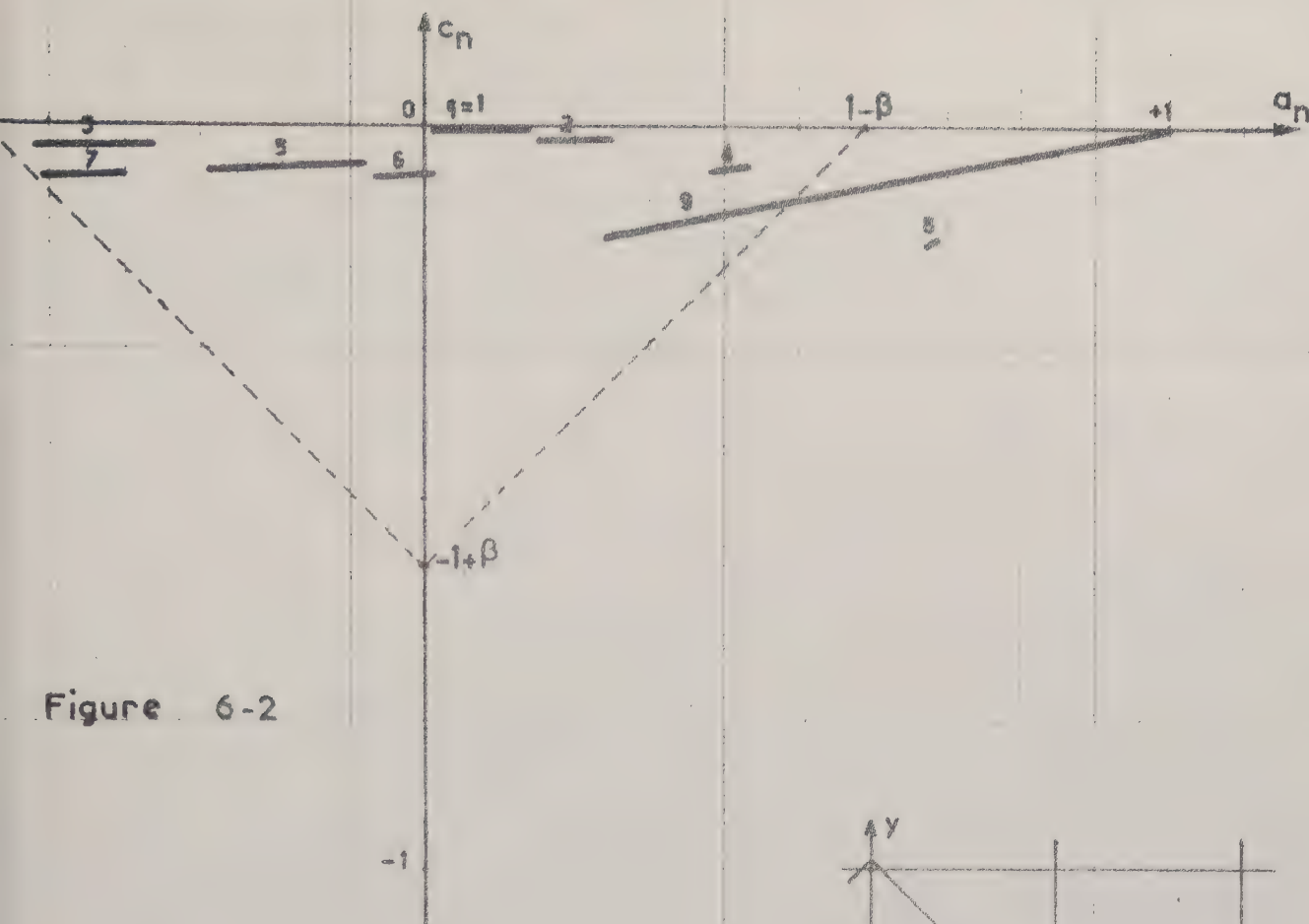


Figure 6-2

REGIME DYNAMIQUE

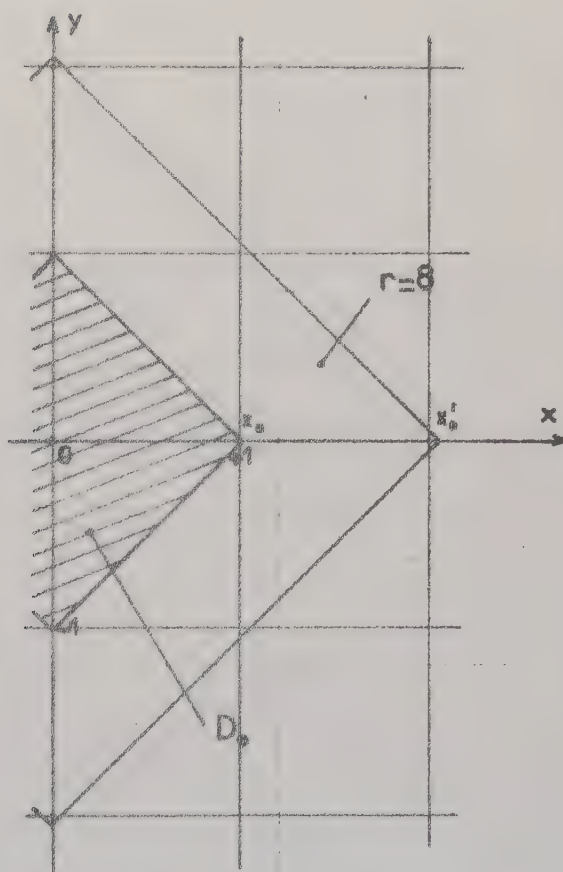


Figure 6-3

D'autre part, le domaine D_0 (voir figure 6.1) est soumis à la valeur de l'entier q majorant le nombre de périodes nécessaires à la traversée du seuil ; il est aisé de montrer que le paramètre x_0 définissant D_0 doit vérifier :

$$(1 - D^q) (x_0 + 1) \geq 2 \quad D = e^{-\frac{1}{T'}} \quad (6.8)$$

Pour $q = 1$ nous obtenons $x_0 = 1,01$.

La figure (6.8) représente les zones de convergence en r périodes vers le domaine D_0 .

6.2.4. Remarque.

La méthode de majoration par q du nombre de périodes nécessaires à la traversée de la région définie par $|x_n| < 1$, peut être améliorée en divisant cette région en zones de traversée en $q, q - 1, q - 2, \dots$ périodes ; une meilleure approximation de la valeur du temps de réponse est ainsi obtenue.

6.3. Obtention d'un régime transitoire sans dépassement.

Désirant maintenant imposer au système une forme particulière de réponse transitoire, nous allons appliquer la méthode exposée au chapitre trois. Elle permet, en effet, d'obtenir un temps de réponse à β % près fixe, avec absence de dépassement.

Rappelons les équations qui régissent l'asservissement étudié :

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_n + b_n J_n \\ y_{n+1} = c_n x_n + d_n y_n \end{cases} \quad (6.9)$$

où :

$$a_n = 1 - \frac{L_1}{|x_n|} \sum_{i=0}^q \alpha_i \left[1 - 4T' D (\alpha_1 - 1) e^{\frac{i}{4T'}} \right]$$

$$b_n = 1 - b$$

$$c_n = \dots \frac{1}{|x_n|} \sum_{i=0}^3 \mu_i (4T^i (b_1 - 1)) e^{-\frac{i}{4T^i}}$$

$$d_n = b$$

$$\text{avec } b = 0 - \frac{1}{4T^i} \quad c_1 = 0 - \frac{k}{4T^i}$$

Examinons successivement les diverses conditions d'application de la méthode qui sont apportées au cours du chapitre trois.

- Les conditions suivantes sont vérifiées immédiatement :

$$b_n > 0 \quad (3.4)$$

$$d_n > 0 \quad (3.7)$$

- Montrons que la condition ci-dessous l'est aussi :

$$c_n d_n - b_n c_n > 0 \quad (3.7 \text{ bis})$$

En effet, après réduction, on peut écrire :

$$c_n d_n - b_n c_n = \left[1 + \frac{1}{|x_n|} \sum_{i=0}^3 \mu_i (4T^i (b_1 - 1)) e^{-\frac{i}{4T^i}} - k \right]$$

$$\text{Or } \left(e^{-\frac{k}{4T^i}} - 1 \right) e^{-\frac{i}{4T^i}} > -\frac{k}{4T^i} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

d'où le résultat cherché.

Remarquons que les conditions (3.4), (3.7) et (3.7 bis) ne sont pas sévères et sont en fait vérifiées par de nombreux systèmes.

- Assurons nous maintenant de l'existence de racines réelles pour le trinôme

$$\lambda^2 b_n + \lambda(d_n - a_n) - c_n = 0 \quad (6.10)$$

Il convient de distinguer deux cas :

a - $\underline{|x_n| < 1}$

dans ces conditions, nous savons que :

$$a_n = 1 \quad c_n = 0$$

Les racines λ_1 et λ_2 du trinôme (6.10) sont alors

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1$$

b - $\underline{|x_n| > 1}$

Le discriminant Δ_n de (6.10) doit être positif

$$\Delta_n = (a_n - D)^2 + 4(1 - D) c_n > 0 \quad (3.11)$$

ainsi qu'une des racines de l'équation (6.10) ($\lambda_n > 0$).

Les racines étant de même signe ($c_n < 0$), nous devons satisfaire :

$$a_n - D > 0 \quad (6.12)$$

Supposons que

$$1 + q a' \leq |x_n| < 1 + (q + 1) a'$$

Il est aisé de voir, en étudiant les variations des coefficients a_n et c_n en fonction de $|x_n|$, que si les conditions (6.11) et (6.12) sont vérifiées pour $|x_n| = 1 + q a'$, elles le sont a fortiori pour toute valeur de $|x_n|$ appartenant à l'intervalle de quantification considéré.

Remarque :

Le résultat précédent est d'ailleurs intuitif, car il y a, en fait, en raison de la quantification, une saturation locale de la régulation qui rend le système "localement stable".

Pour $|x_n| = 1 + q a'$ les conditions (6.11) et (6.12) peuvent se mettre sous la forme :

$$\Delta_n = \frac{\left(\sum_{i=0}^3 n_i k - u \right)^2}{(1 + q a')^2} A'^2 - \frac{2(1-D)}{1 + q a'} \left(\sum_{i=0}^3 n_i k + u \right)^2 A' + (1-D)^2 > 0 \quad (6.13)$$

avec $u = \sum_{i=0}^3 n_i 4 T' D (D_1 - 1) e^{\frac{i}{4T'}}$

$$A' < \frac{(1-D)(1 + q a')}{\sum_{i=0}^3 n_i k - u} = A'_0 \quad (6.14)$$

Δ_n se présente sous la forme d'un trinôme du second degré en A' , ayant toujours deux racines réelles et positives. La condition (6.13) est donc équivalente à :

$$A' < A'_1 \quad \text{ou} \quad A' > A'_2$$

A'_1 et A'_2 étant les deux racines de $\Delta_n = 0$

Vérifions de plus que pour $A' = A'_0$, Δ_{-} est négatif.

$$\Delta_{-} = (1 - D)^2 - 2(1 - D)^2 \frac{\sum_{i=1}^3 a_i k + u}{\sum_{i=0}^3 a_i k - u} + (1 - D)^2$$

$$\Delta_{-} = 2(1 - D)^2 \frac{-2u}{\sum_{i=0}^3 a_i k - u}$$

Or

$$\sum_{i=0}^3 a_i k - u = \sum_{i=0}^3 a_i \left[k - 4 T' D (E_1 - 1) e^{\frac{i}{4T'}} \right] > 0$$

la quantité entre crochets étant toujours positive pour $i = 0, 1, 2, 3$. D'où :

$$\Delta_{-}(A'_0) < 0$$

Finalement, il ne subsiste qu'une seule condition pour que l'équation (6.10) ait deux racines réelles et positives.

$$A' < A'_1 = (1 - D) (1 + q e') \frac{1}{\left(\left(\sum_{i=0}^3 a_i k \right)^{1/2} + u^{1/2} \right)^2} \quad (6.15)$$

Le domaine D cherché, stable par rapport aux conditions initiales, s'étend jusqu'à l'infini si l'inégalité (6.15) est vérifiée pour les neuf valeurs possibles de q ($q = 0, 1, \dots, 8$).

dans le cas contraire Γ est limité à $|x_H| < 1 + (q_0 + 1)$ et si (3.15) est vérifiée et $q = 0$ et $q = q_0$.

La condition (3.15) conduit cependant à des calculs assez longs et nous représentons maintenant que pour la valeur de seuil ($q = 0$) et la saturation ($q = 1$).

3.3.1. Condition d'existence de domaine au voisinage du seuil ($q = 0$)

$$A' < (1 - B) \frac{1}{(k^{1/2} + v^{1/2})^2} \quad (3.16)$$

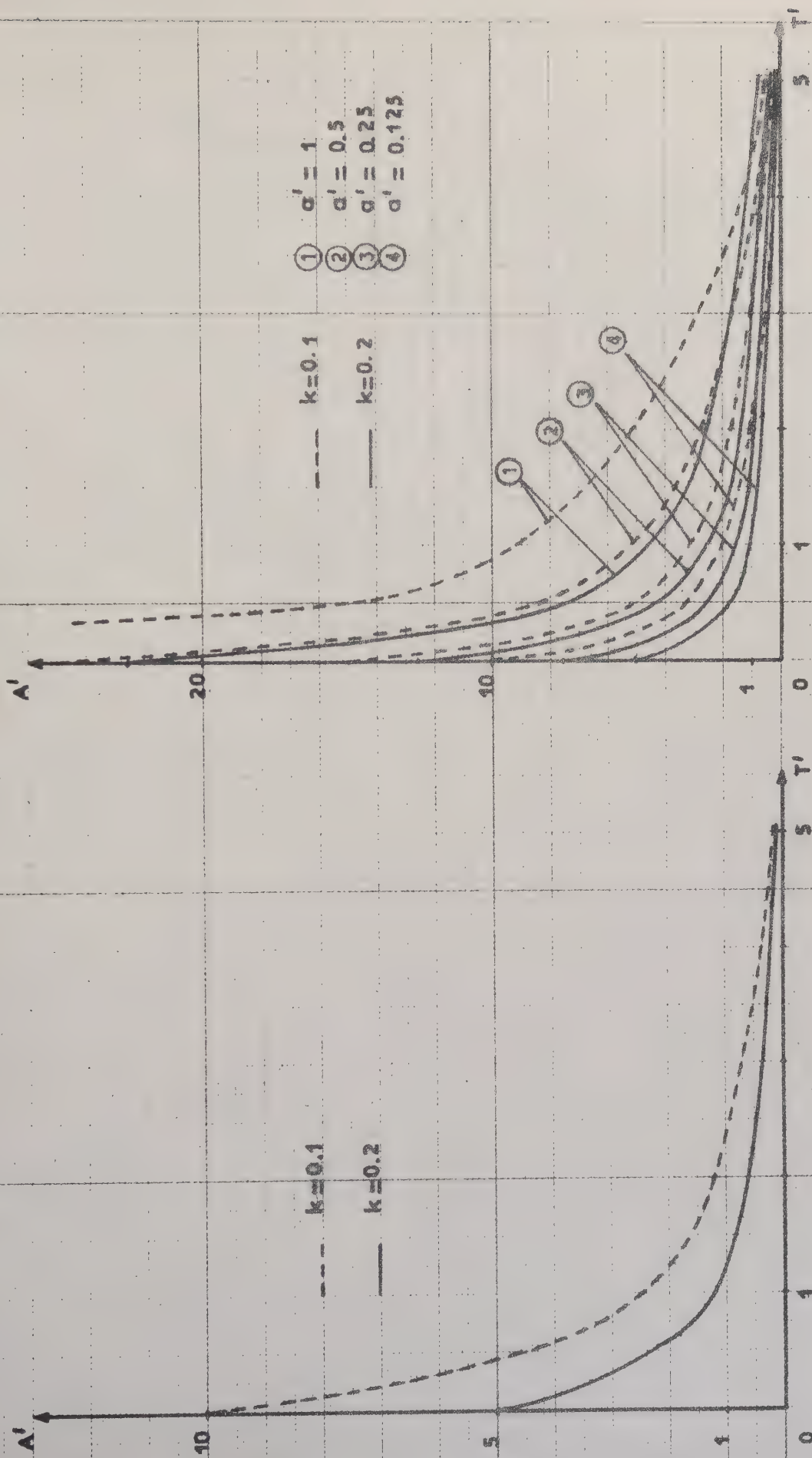
avec $v = 4 T' \left(1 - \frac{1}{2T'} \right) \left(1 - \frac{1}{2T'} - 1 \right)$

3.3.2. Condition d'existence du domaine Γ à la saturation.

$$A' < (1 - B) \frac{1 + \frac{1}{2T'}}{2} \frac{1}{(k^{1/2} + r^{1/2} + \frac{1}{v^{1/2}})^2} \quad (3.17)$$

avec $r = \frac{1 + \frac{1}{2T'}}{2}$

Les inégalités (3.16) et (3.17) sont visualisées dans le plan (A' , T') par les réseaux de courbes donnés figure 3.4.



EXISTENCE des DOMAINES

Figure 6-4

6.4. Conclusion.

Les deux méthodes d'étude du régime dynamique présentées au cours de ce chapitre ne sont pas directement comparables. En effet, la première, basée sur la décroissance d'une distance dans un espace métrique, conduit en raison de l'existence du seuil (à l'intérieur duquel la régulation n'existe pas) à des domaines suffisants où le temps de réponse est relativement grand. Dans la seconde méthode, une absence de dépassement est imposée au régime transitoire. Le franchissement du seuil étant ainsi évité, les temps de réponse obtenus seront plus courts mais les domaines correspondants n'entourent plus l'origine du plan de phase. Ces résultats seront vérifiés au chapitre suivant par simulation sur calculatrice analogique.

CHAPITRE 7

SIMULATION DES ASSERVISSEMENTS A MODULATEUR BINAIRE

ET OBJET DU PREMIER OU DU SECOND ORDRE

7.1. Introduction

Le calculateur analogique, couramment utilisé à l'heure actuelle par les automaticiens en raison de sa souplesse et de sa facilité de collage, est un outil précieux. Il permet, en effet, d'observer et de modifier aisément le comportement dynamique d'un modèle et offre ainsi le choix d'une méthode d'analyse mieux adaptée au système considéré. Il offre, d'autre part un moyen de vérification précis et rapide d'une étude théorique ; c'est cette dernière possibilité que nous allons utiliser au cours de ce chapitre.

Après un exposé rapide de la simulation du modulateur, nous verrons comment les techniques de calcul multivitesse (23) permettent de réaliser, sur une calculatrice hybride (analogique-logique), l'automatisation des divers tracés de domaines de stabilité ou de temps de réponse des asservissements à modulateur binaire et objet du premier ou du second ordre.

7.2. Réalisation du modulateur (24)

Rappelons brièvement les caractéristiques du modulateur binaire (la description détaillée se trouve au chapitre quatre).

Le modulateur utilisé est un organe non linéaire transformant suivant le code binaire naturel à quatre moments, la valeur d'un signal échantillonné, quantifié ε_n , en une suite de quatre impulsions, de hauteur $\Lambda \text{ sign}(\varepsilon_n)$, de largeur L , également réparties dans le temps au cours de la période d'échantillonnage. Le quantifieur de pas a , comprend un seuil s_0 et une saturation (atteinte si $|\varepsilon_n| \geq s_0 + 0.5a$).

Il est possible de distinguer deux parties dans le principe de la simulation : d'une part la quantification du signal échantillonné et bloqué, est obtenue par comparaison de ce signal à une dent de scie synchrone à l'horloge à 1 kHz, on doit correspondre ainsi à la tension de sortie du bloc avec un nombre binaire $[n_3 \dots n_2 n_1 n_0]$ contenu dans un compteur. D'autre part l'impulsion de rang $(i+1)$, émise si la dent si n_{i+1} est générée en comparant une autre dent de scie à une tension continue (la variation de cette tension permettant de régler la largeur des impulsions).

7.2.1. Quantification.

Nous formons la différence $(|e_n| - s_0)$ que nous comparons à une tension en dent de scie croissant d'une valeur égale au pas de quantification a en une période d'horloge (figure 7.1).

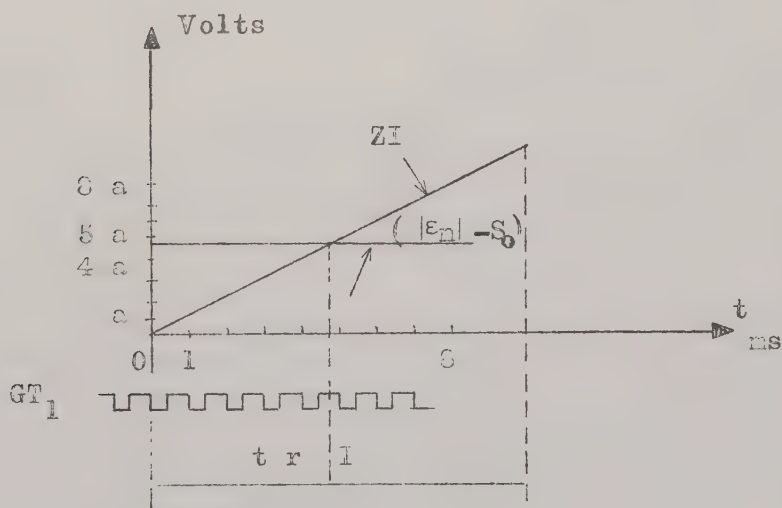


Figure 7.1.

La dent de scie E_1 , fournie par la machine, étant synchrone de l'horloge $G T_1$, les impulsions issues de $G T_1$ sont envoyées dans un compteur fonctionnant ici en code binaire naturel. L'entrée de ce compteur n'est écartée que si $(|e_n| - s_0)$ est positif (voir figure 7.2a), elle est réinitialisée lorsqu'il y a égalité entre la dent de scie E_1 et $|e_n| - s_0$. Les variables binaires A_1 sont alors disponibles à la sortie du compteur. Une liste des symboles, représentant les divers éléments logiques et analogiques utilisés dans la simulation, est donnée figure 7.3.

Remarque :

Le rôle des bascules 22 et 23 est de mettre en mémoire la sortie des comparateurs X_0 et X_1 et d'éliminer ainsi des aléas qui se produiraient lorsque $|e_n| \# s_0$.

7.2.2. Mission des impulsions.

Nous utilisons ici encore une dent de scie E_{II} fournie par la machine, que nous comparons à une tension continue réglable. Nous obtenons ainsi une impulsion dont la largeur réduite est réglée au moyen du potentiomètre noté k (voir figure 7.4).

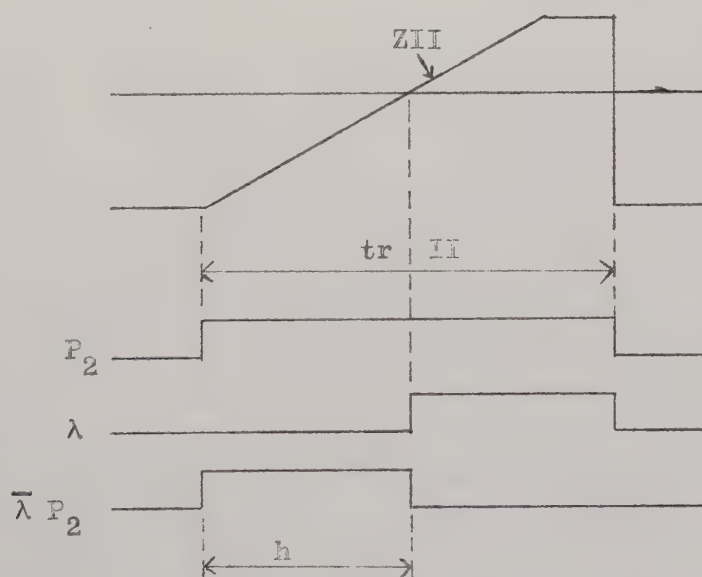


Figure 7.4.

Le schéma de cette partie de circuit est donné figure 7.2. b.

7.2.3. Diagramme de fonctionnement

La calculatrice fonctionnant en "ITERATIF AUTOMATIQUE" est successivement mise en mode I puis en mode II (figure 7.5.b).

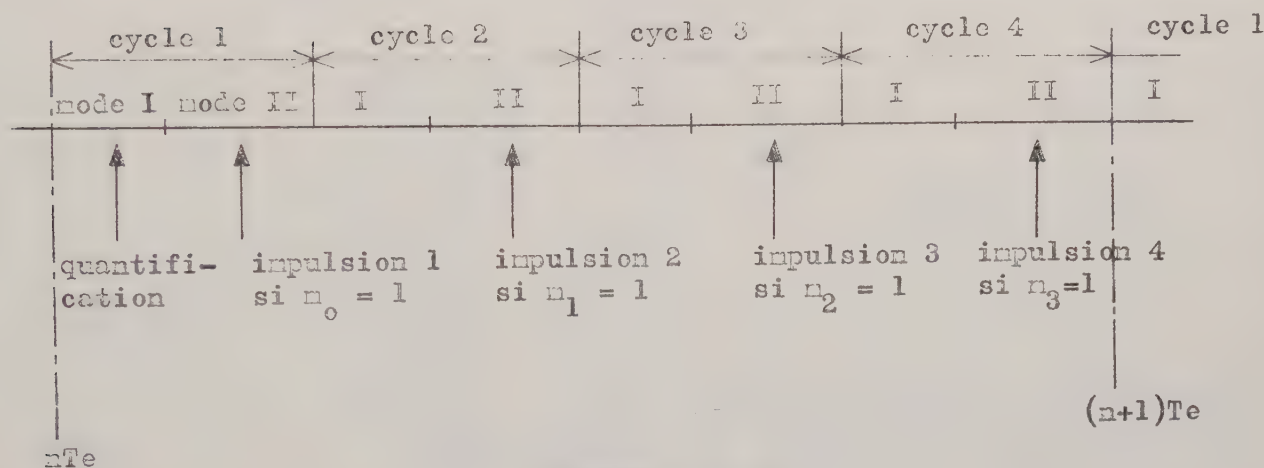


Figure 7.5. b

7.2.4. Schéma général.

L'intégrateur 12 (voir figure 7.5.a) fournit le balayage en temps. Afin d'obtenir des impulsions disposées en cours de la période comme le montre la figure 4.8, les intégrateurs du filtre, ainsi que celui fabriquant le temps, ne sont mis en calcul que pendant r_{II} et sont gelés le reste du temps.

Les commandes R et E de ces intégrateurs sont disponibles à la sortie de MANE 3 et 4, et le diagramme des temps général est donné figure 7.6.

Remarque : Toutes les bascules sont remises à zéro pendant le temps r_{II} du cycle quatre.

MODULATEUR BINAIRE

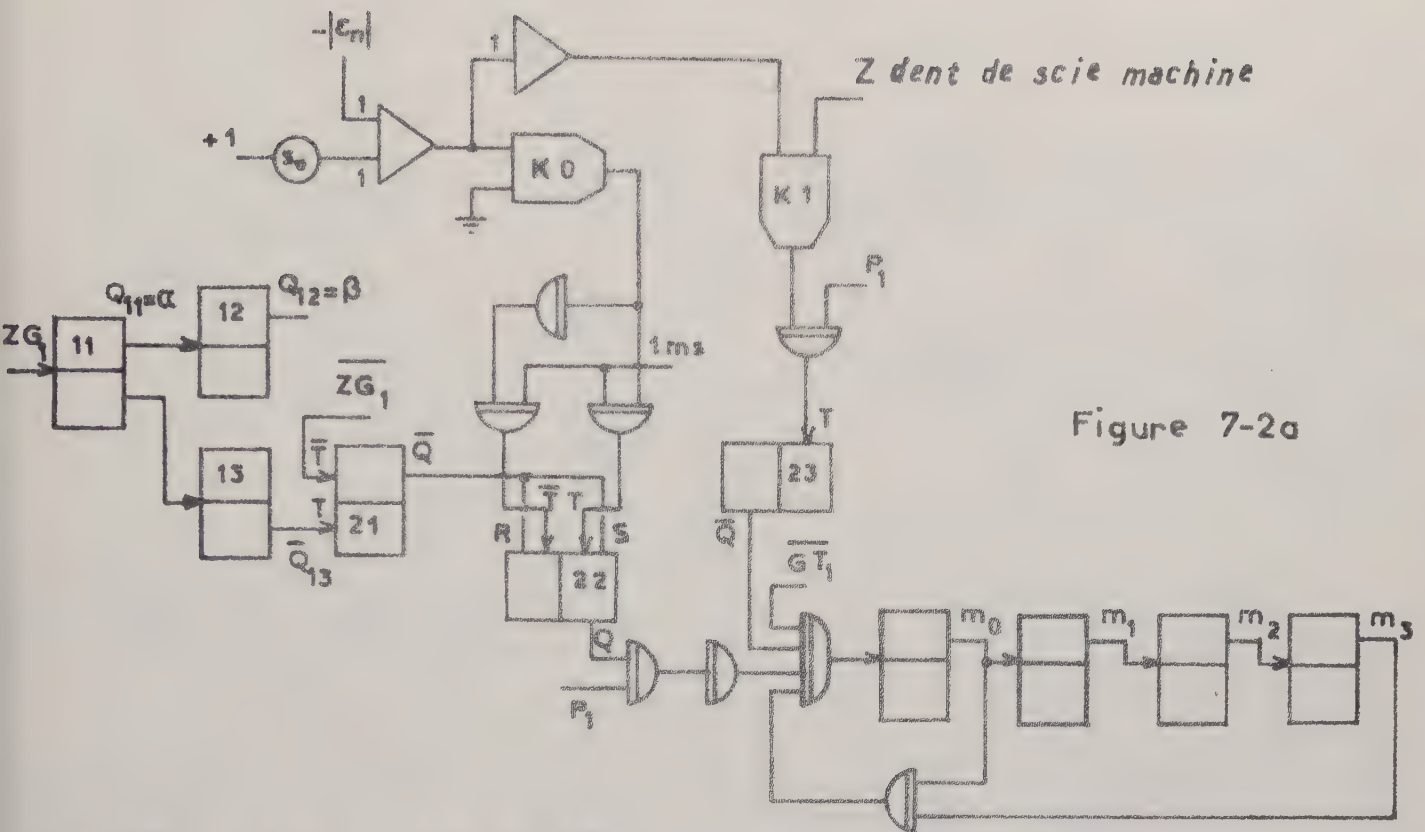


Figure 7-2a

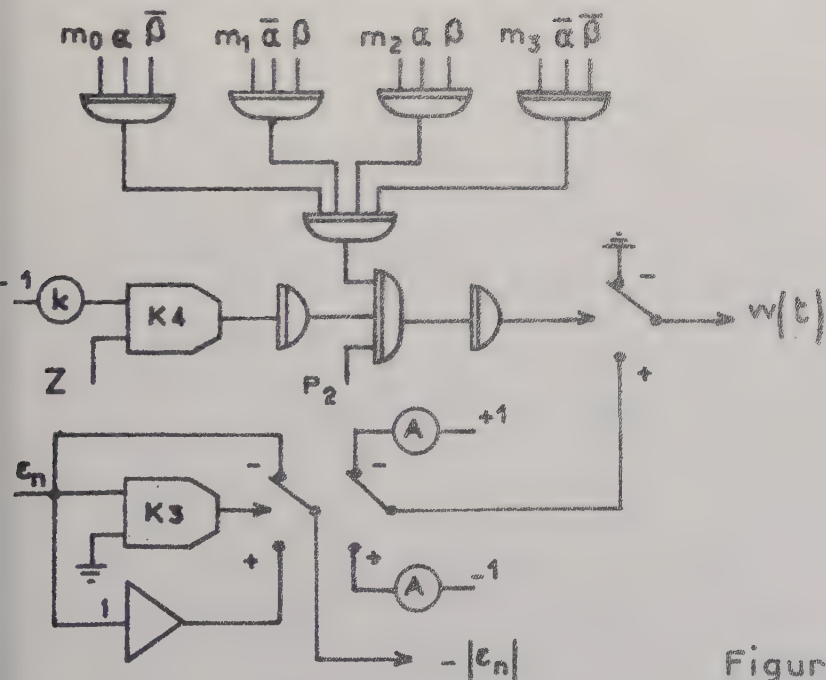


Figure 7-2b

MODULATEUR BINAIRE

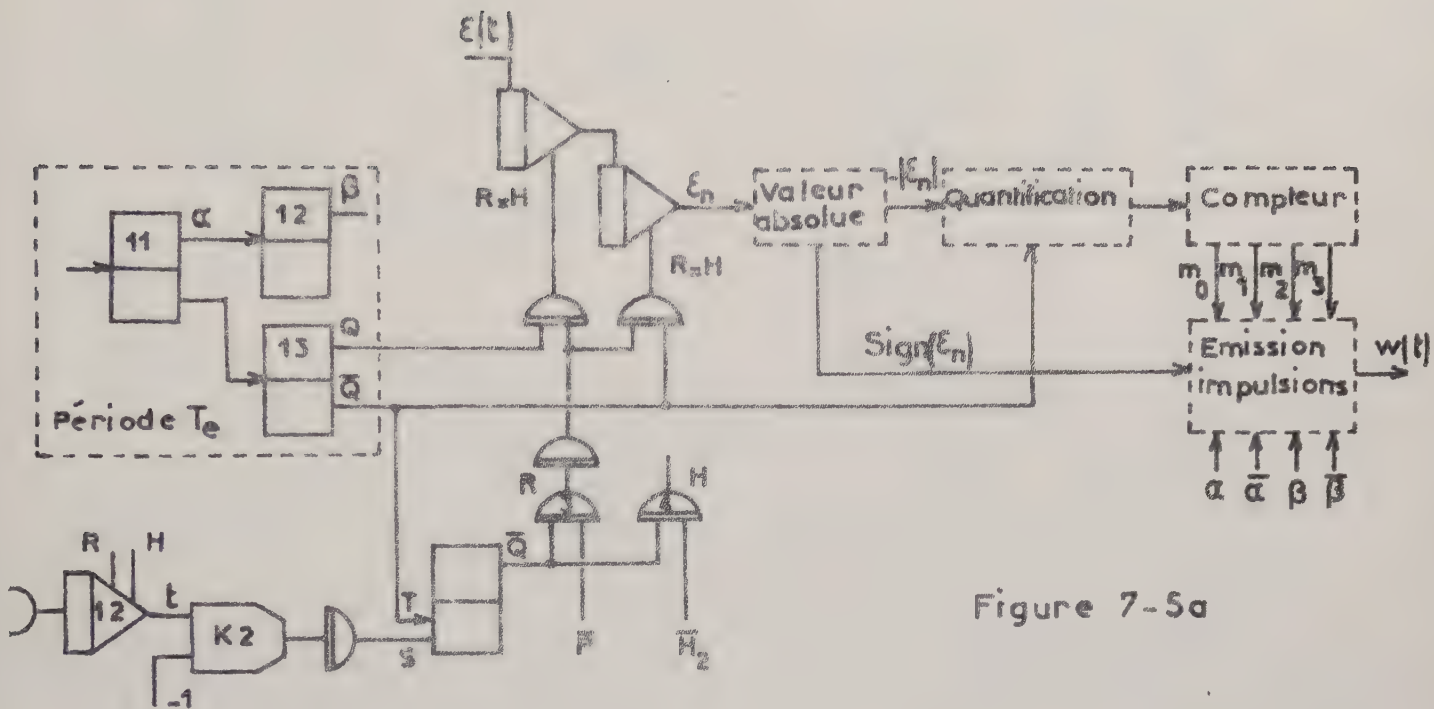


Figure 7-5a

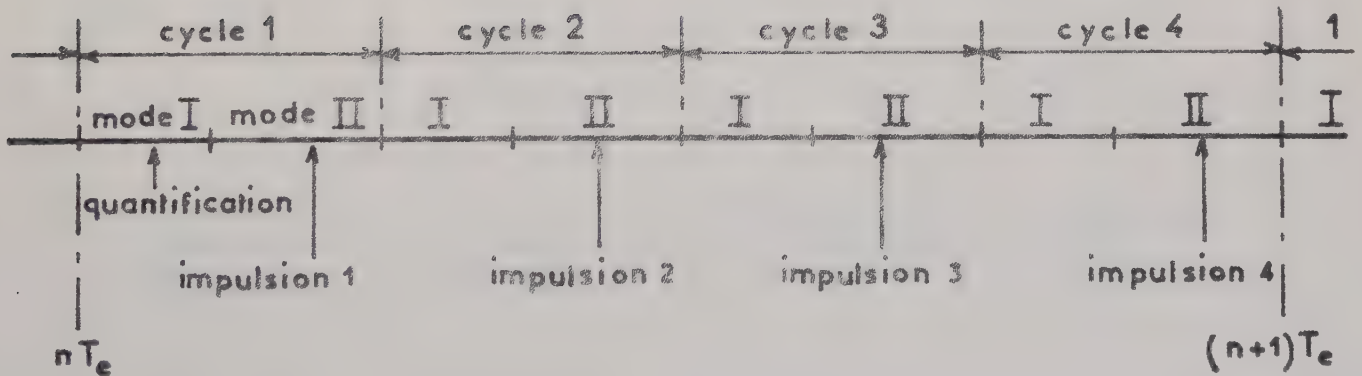
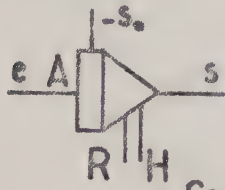


Figure 7-5b

SYMBOLES UTILISES

Intégrateur



$$s = s_0 - A \int_0^t e dt$$

Commandes logiques

	C. I.	Cakul	Gel
R	1	0	0
H	1	0	1

Comparateur



$$k = 0 \text{ si } e_1 + e_2 < 0$$

$$k = 1 \text{ si } e_1 + e_2 > 0$$

Relais



$$s = a \text{ si } x = 1$$

$$s = b \text{ si } x = 0$$

Circuit ET



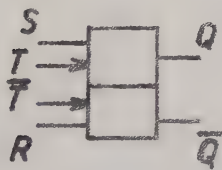
$$s = \overline{x \cdot y}$$

Circuit PAS



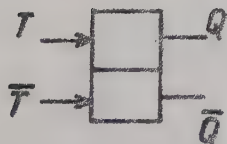
$$s = \overline{x}$$

Bistable



	$T=1 \rightarrow 0$			$\overline{T}=1 \rightarrow 0$			$T=\overline{T}=1 \rightarrow 0$	
S	1	0	Q	-	-	Q	0	Q
R	-	-	$\overline{Q}$	1	0	$\overline{Q}$	0	$\overline{Q}$
Q_{n+1}	Q_n	1	1	Q_n	0	0	$\overline{Q}_n$	$\overline{Q}_n$

Les bascules utilisées sont toutes identiques, mais les liaisons éventuelles $S=Q$ et $R=\overline{Q}$ ne sont pas représentées; d'où les deux autres symboles :



$$S=Q$$

$$R=\overline{Q}$$



$$S=Q$$

$$R=\overline{Q}$$

$$T=\overline{T}$$

Figure 7-3

MODULATEUR BINAIRE

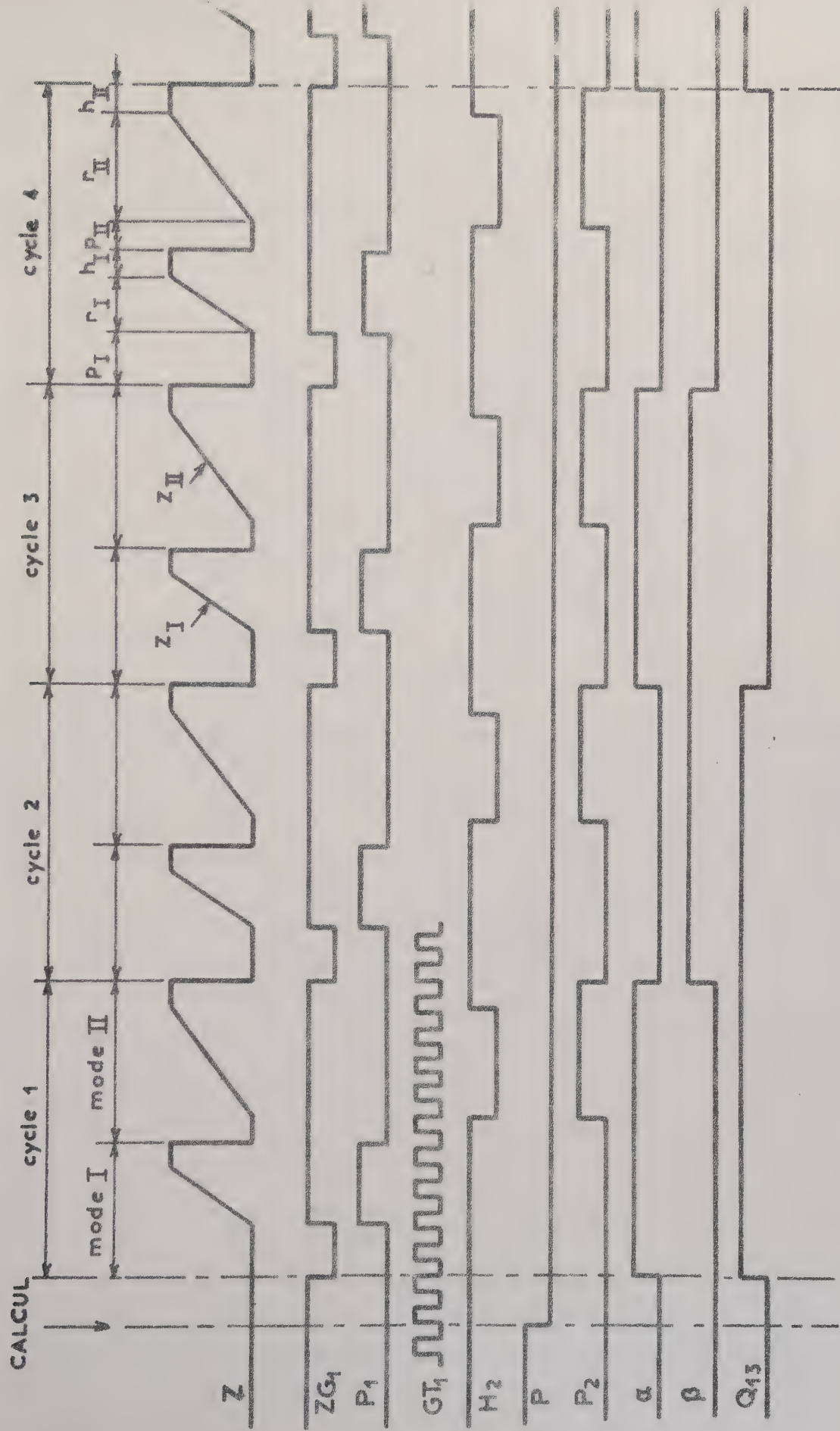


Figure 7-6

7.2.5. Réglage des divers paramètres.

Période d'échantillonnage.

- fixé par la durée du calcul en mode II $tr_{II} = \frac{T_c}{4}$

Seuil.

- réglé par le potentiomètre noté s_0 entre 0 et 1.

Pas de quantification.

- réglé par la durée du calcul en mode I ; pour le simulateur réalisé ici (saturation pour $|\epsilon_n| \geq s_0 + \delta a$)
 $a_{\max} = \frac{1}{9}$.

Amplitude des impulsions.

- réglée par les deux potentiomètres notés A entre 0 et 1.

Largeur des impulsions.

- réglée par le potentiomètre noté k entre 0 et 1.

7.3. Domaines de stabilité et de temps de réponse du premier ordre

Le domaine de stabilité par rapport aux valeurs de la variable est défini par l'inégalité suivante déduite de (4.7) :

$$A < \frac{1 + \frac{T_c}{T}}{\frac{T_c}{T} - 1} \frac{\sum_{i=0}^3 a_i e^{i \frac{T_c}{4T}}}{|\epsilon_n|} \quad (7.1)$$

La limite du domaine, obtenue lorsque la condition précédente devient une égalité, est caractérisée par :

$$\epsilon_{n+1} = -\epsilon_n \quad (7.2)$$

7.3.1. Principe du tracé automatique.

La technique de calcul utilisée est à deux vitesses. Nous réalisons un balayage en ϵ_n de vitesse lente devant la période d'échantillonnage. L'obtention de la valeur de A, solution de (7.2), s'effectue en deux temps :

a) Calcul de ε_{n+1} , ε_n étant la condition initiale du filtre et le signal d'entrée du modulateur.

b) Test et régulation sur A

A la fin de la période d'échantillonnage, nous effectuons, à l'aide d'un intégrateur de condition initiale A_j , l'opération suivante :

$$A_{j+1} = A_j + \int_0^{\Delta t} (\varepsilon_{n,j} + \varepsilon_{n+1,j}) dt \quad (7.3)$$

La propriété, mise en évidence sur la figure 7.7., assure la convergence du processus.

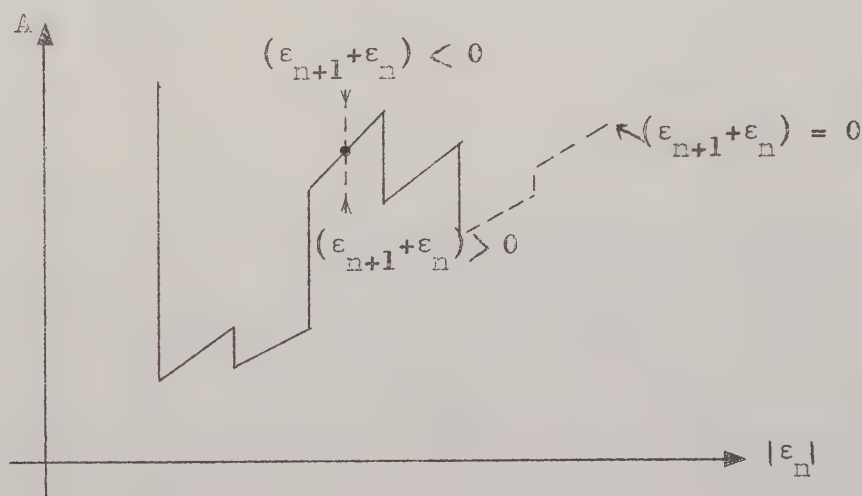


Figure 7.7.

Remarque :

Pour une valeur constante de ε_n , l'erreur permanente sur A est théoriquement nulle. La valeur du gain K (ou de t_0 , ce qui revient au même) conditionne à la fois la stabilité du montage et son temps de réponse. Par contre, pour ε_n variable il existe nécessairement une erreur de "trainage" ; nous chercherons à rendre cette

erreur aussi faible que possible par un choix convenable du gain K et de la vitesse de balayage.

7.3.2. Montage.

Le schéma de la simulation ainsi que le diagramme des temps correspondant sont donnés figure 7.8. Sur ce diagramme, seuls sont représentés les signaux n'apparaissant pas déjà figure 7.3.

7.3.3. Résultats.

Les figures 7.9a à 7.9c montrent divers domaines de stabilité globale. On vérifie, en particulier, la position du minimum de la limite de ces domaines (pour $T' = 1$ on a $u = e^{1/4T'} = 1,28$ - on lit sur la figure 4.3 : $a'_{73} = 0,28$ - $a'_{31} = 0,64$). Par ailleurs, l'influence du paramètre k est mise en évidence sur la figure 7.9c.

Le même montage permet également d'obtenir les limites des domaines de temps de réponse (définies par $|\epsilon_{n+1}| = \frac{|\epsilon_n|}{r}$) ; un exemple de ces domaines est donné figure 7.9d.

Il convient de noter que l'enregistrement des diverses caractéristiques (tant pour le premier que pour le second ordre) présente une difficulté due à la nature quantifiée du modulateur : le franchissement d'une discontinuité provoque en effet un régime transitoire se traduisant le plus souvent par des oscillations. On peut pallier à cet inconvénient en adjoignant un circuit, non représenté sur la figure 7.8., qui assure le relèvement de la plume du traceur lorsque "l'erreur" $|\epsilon_{n+1} + \epsilon_n|$ dépasse un certain seuil.

7.3.4. Requies.

Les paramètres a' , T' et k étant fixés, la valeur maximale de A' ($A' = A/s_c$) assurant la stabilité illimitée est celle correspondant au minimum de la limite du domaine de stabilité globale

Tracé automatique des domaines de stabilité pour les systèmes du premier ordre .

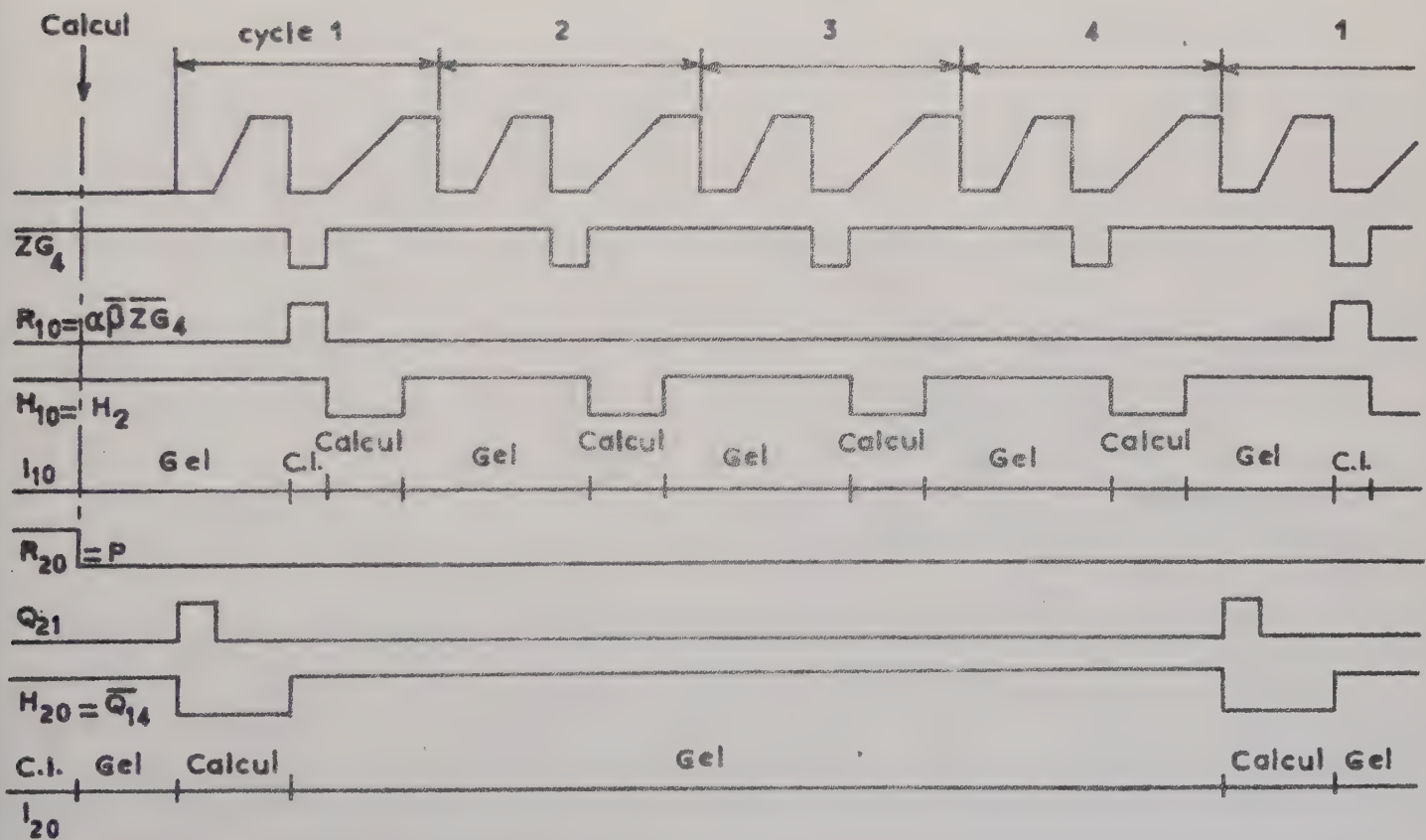
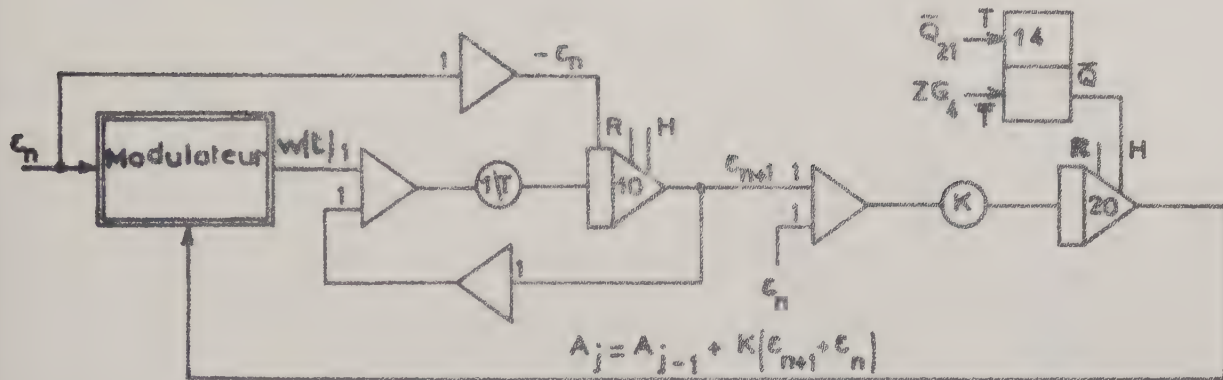


Figure 7-8

Figure 7-9

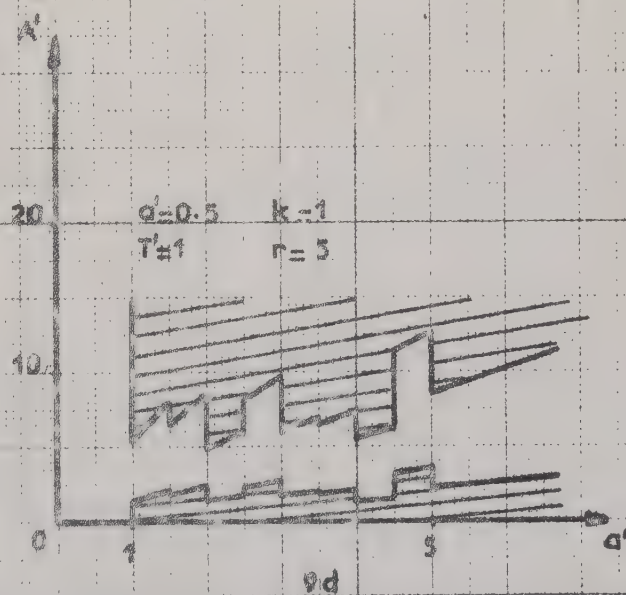
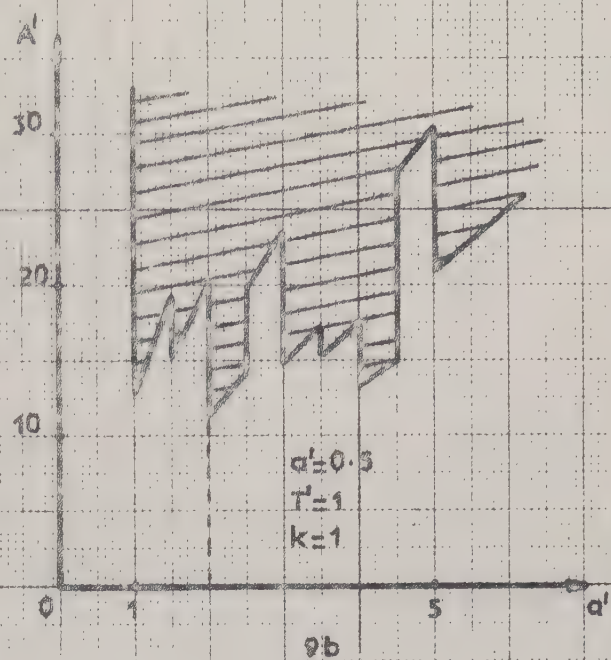


Figure 7-9

dans les plans $(|e_n|, A)$ et $(|x_n|, A')$. Il serait donc possible d'obtenir automatiquement des domaines de stabilité illimitée dans le plan des paramètres (par exemple $A' = f(T')$ pour A' et k' donnés).

7.4. Domaines de stabilité du second ordre

Un domaine de stabilité (par rapport aux valeurs des variables) est caractérisé par la décroissance de la distance :

$$d(P_n) = |x_n| + |y_n| = \frac{|e_n| + T |e_n|}{s_0}$$

et sa limite peut être obtenue directement sur un enregistreur par une échelle analogique à celle exposée au paragraphe précédent.

Soit P_n l'état du système à l'instant $n T_c$; les phases successives du calcul sont alors :

- Détermination de l'état P_{n+1}
- Test : $d(P_{n+1}) \geq d(P_n)$
- Correction de l'état initial P_n .

Faisant varier y_n lentement devant la période d'échantillonnage, la recherche (voir figure 7.10) de la valeur de x_n pour laquelle $d(P_{n+1}) = d(P_n)$ s'effectue selon le processus décrit par l'équation suivante :

$$x_{n,j+1} = x_{n,j} - K \int_0^{t_c} [c(P_{n+1,j}) - c(P_n,j)] dt \quad (7.4)$$

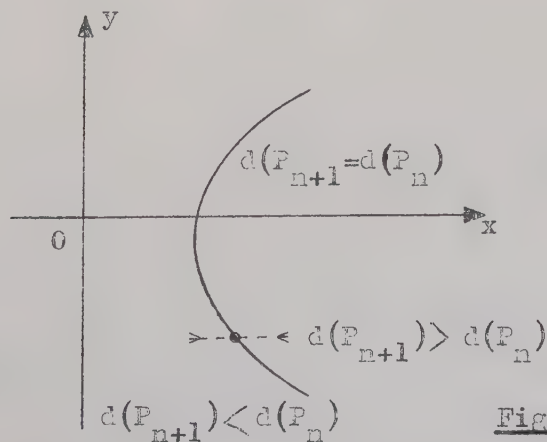
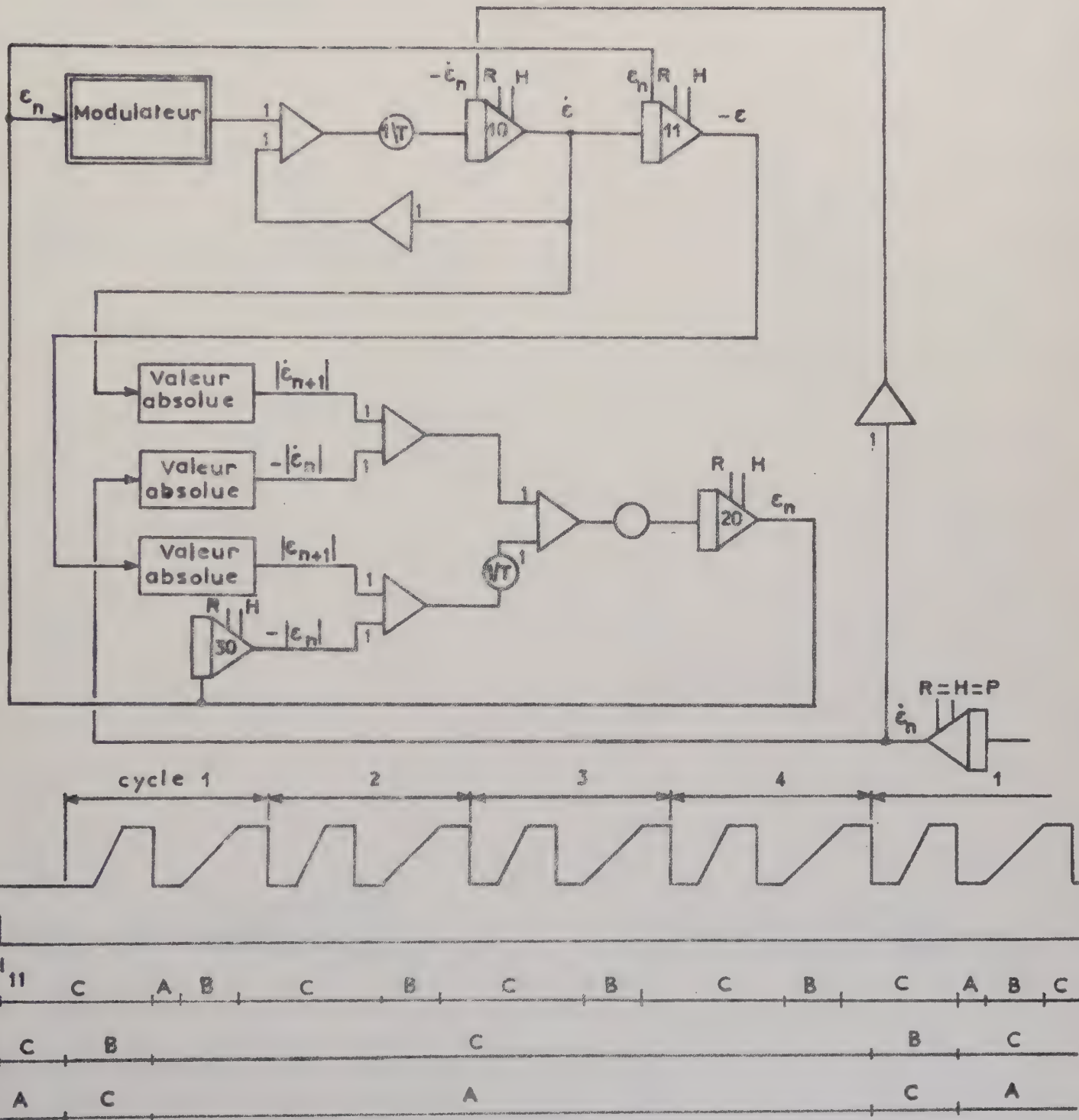


Figure 7.10

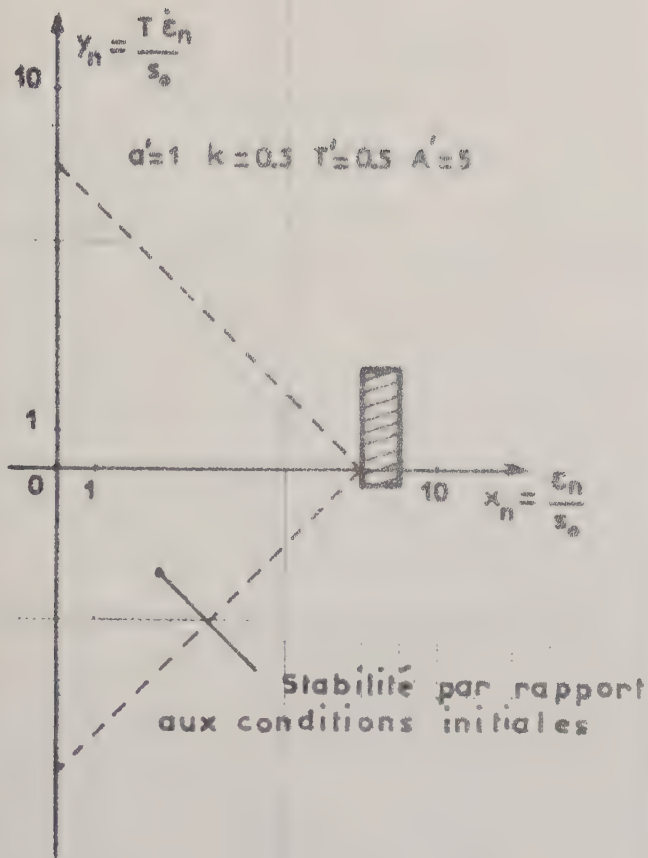
Tracé automatique des domaines $d(P_{n+1}) < d(P_n)$



A = Conditions Initiales B = Calcul C = Gel

Figure 7-11

Domaines $d(P_{n+1}) < d(P_n)$



$$\begin{aligned} a' &= \frac{a}{s_0} \\ k &= \frac{T}{T_c/4} \\ T' &= \frac{T}{T_c} \\ A' &= \frac{A \cdot T_c/4}{s_0} \end{aligned}$$

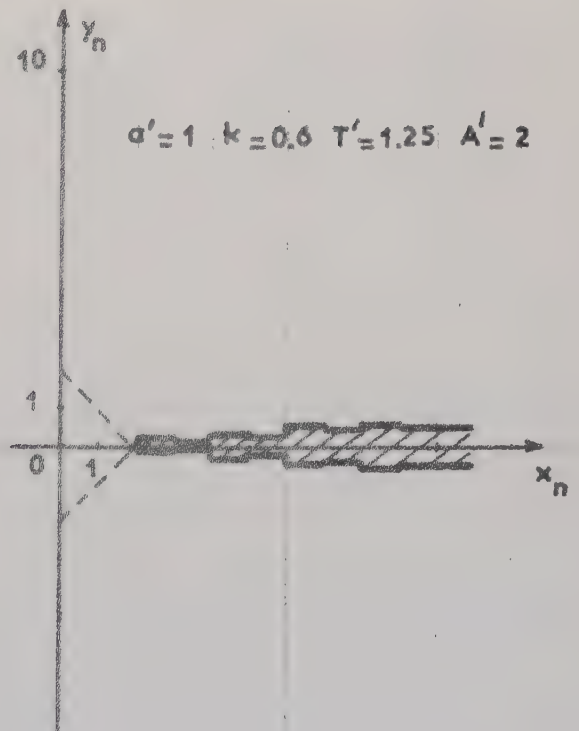
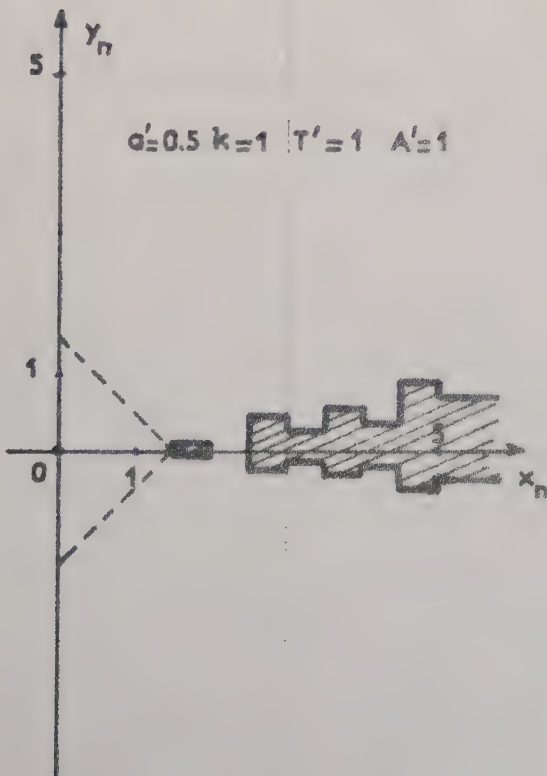


Figure 7-12

Le schéma de la simulation et le diagramme des temps correspondant sont donnés figure 7.11.

Les figures 7.12 montrent des exemples de domaines (en réalité les domaines présentés doivent être complétés par symétrie par rapport à l'origine).

Remarque : La méthode proposée permet d'obtenir rapidement les domaines de stabilité globale pour une distance donnée (les domaines de stabilité par rapport aux conditions initiales s'en déduisent aisément). Toute autre distance pourrait être utilisée, ce qui conduirait sans doute à une extension du domaine de stabilité par rapport aux conditions initiales.

7.5. Domaines conduisant à des régimes transitoires sans dépassement

Nous avons vu au chapitre trois (figure 3.1) comment l'examen des caractéristiques C , C_1 et C_2 permet d'obtenir le domaine D caractérisé par un temps de réponse donné et une absence de dépassement.

Le tracé de la caractéristique $x_{n+1} = Vx_n$ se réalise sans difficulté, selon un principe déjà exposé, en faisant varier lentement x_n et en utilisant $(x_{n+1} - Vx_n)$ comme terme de correction sur y_n (voir figure 7.15). Quant au tracé de C_1 et C_2 , il est facilité par une propriété que nous allons mettre maintenant en évidence.

7.5.1. Propriété géométrique de C_1 et C_2 .

Considérons dans le plan de phase, les deux caractéristiques C_1 et C_2 définies respectivement par :

$$y_n + \lambda_{1n} x_n = C \quad y_n + \lambda_{2n} x_n = C$$

où λ_{1n} et λ_{2n} sont les racines supposées positives de l'équation :

$$\lambda^2 b_n + \lambda(a_n - a_n) - c_n = 0 \quad (7.5)$$

Supposons que P_n , point représentatif de l'état du système à l'instant n , appartienne à C_1 ou C_2 ; ses coordonnées sont alors :

$$x_n, y_n = - \lambda_{in} x_n \quad \text{avec} \quad i = 1 \text{ ou } i = 2$$

Le conséquent P_{n+1} de P_n est tel que :

$$y_{n+1} = c_n x_n + d_n y_n = (c_n - \lambda_{in} d_n) x_n$$

ce qui peut encore s'écrire d'après (7.5)

$$y_{n+1} = - \lambda_{in} (a_n - \lambda_n b_n) x_n = - \lambda_{in} x_{n+1}$$

D'où le résultat :

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{y_n}{x_n} \quad (7.6)$$

La figure 7.13 illustre cette propriété (points P_{1n} et P_{2n})

De la même manière, on montrerait qu'un point P_n situé entre C_1 et C_2 est tel que

$$\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} > \frac{y_n}{x_n} \quad (7.7)$$

l'inégalité précédente devant être inversée si P_n est situé à l'extérieur de la région définie par C_1 et C_2 . La figure 7.13 montre les évolutions correspondant à chaque cas (points P_{3n} et P_{4n} , P_{5n}).

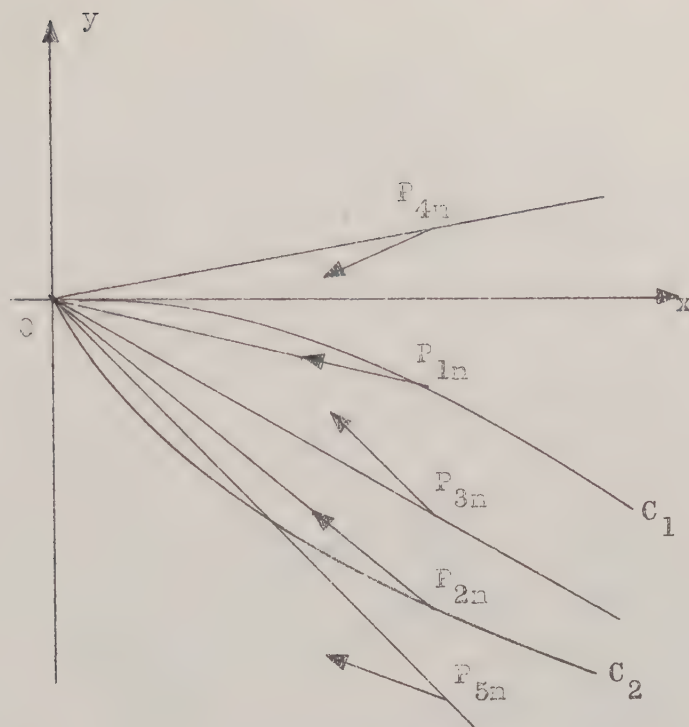


Figure 7.13

7.3.2. Montage.

La simulation est encore identique, dans son principe, aux précédentes : x_n varie lentement et une régulation est effectuée sur y_n de façon à vérifier l'égalité (7.3). Le terme de correction utilisé ($x_{n+1} - x_n \cdot \frac{y_{n+1}}{y_n}$) est élaboré de la façon suivante :

Deux intégrateurs, dont le début de calcul est simultané, fabriquent des rampes $(y_n - y_n t)$ et $(-x_n + x_n t)$ (voir figure 7.14)

L'égalité $y_{n+1} = y_n - y_n t$ est réalisée pour

$$t = 1 - \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

A cet instant :

$$-x_n + x_n t = -x_n \cdot \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

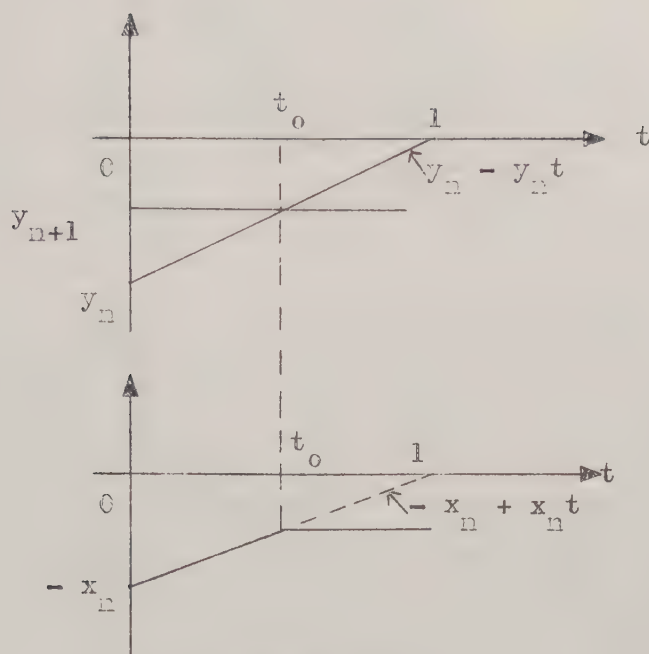


Figure 7.14

Il suffit alors d'ajouter x_{n+1} à la valeur de la rampe $(-x_n + x_n t)$ bloquée à t_0 pour obtenir le terme de correction. Le schéma de cablage et le diagramme des temps correspondant sont donnés figure 7.15.

7.5.3. Résultats :

Les figures 7.16 montrent des exemples de domaines D à l'intérieur desquels la réponse se fait sans dépassement (zones hachurées). En réalité, ces domaines doivent être complétés par symétrie par rapport à l'origine .

Remarque : Nous avons vu, au chapitre III, que les fonctions γ_n et δ_n , définissant les limites du domaine D , devaient être respectivement décroissante et croissante avec x_n (ou constantes).

Tracé automatique des domaines $0 \leq e_{n+1} \leq \sqrt{e_n}$

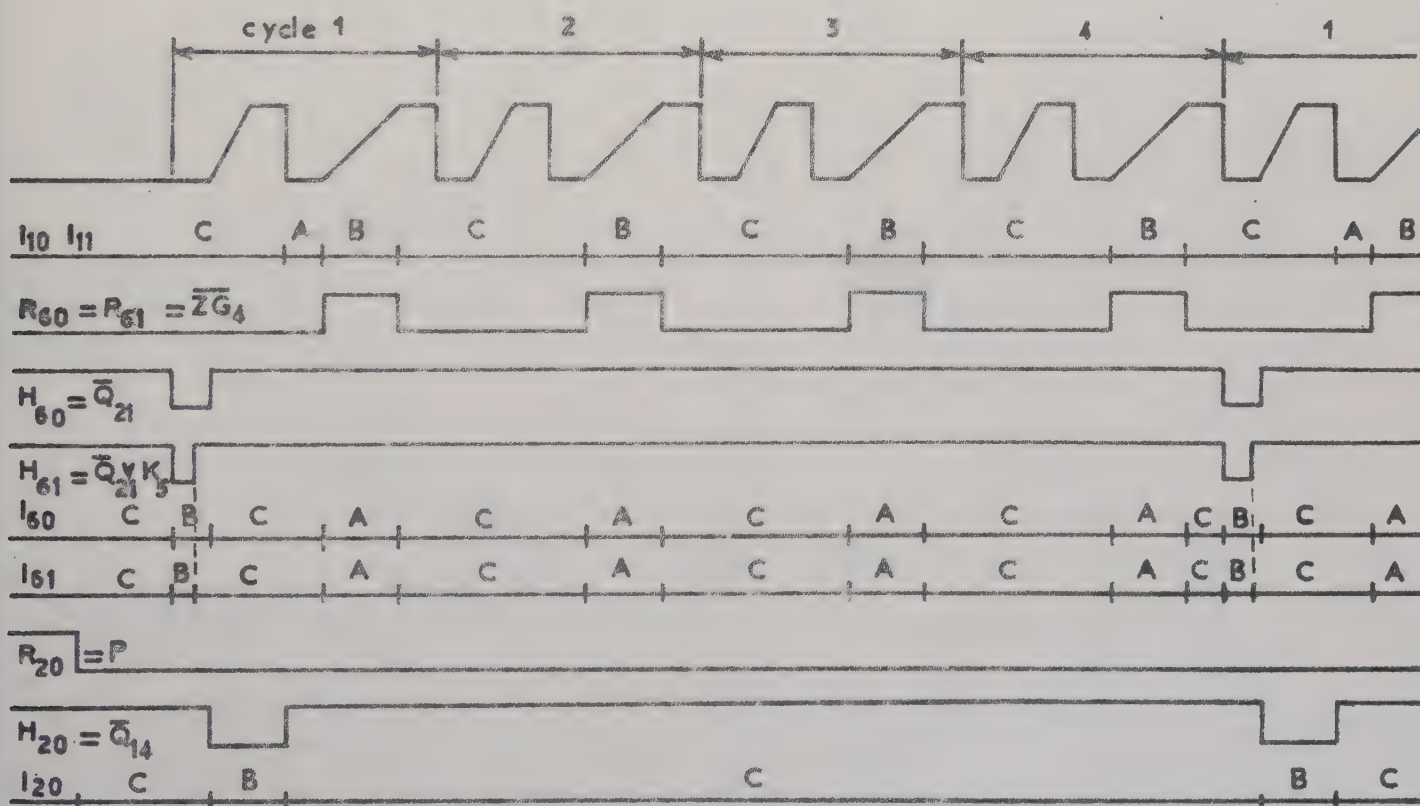
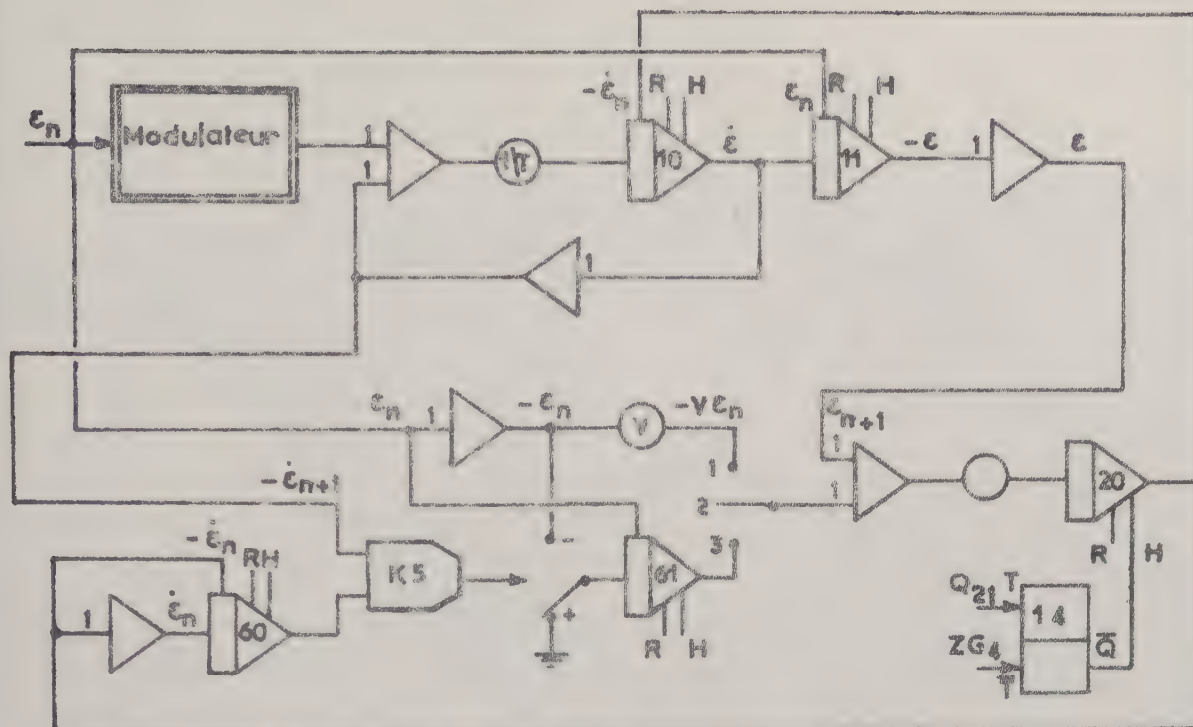
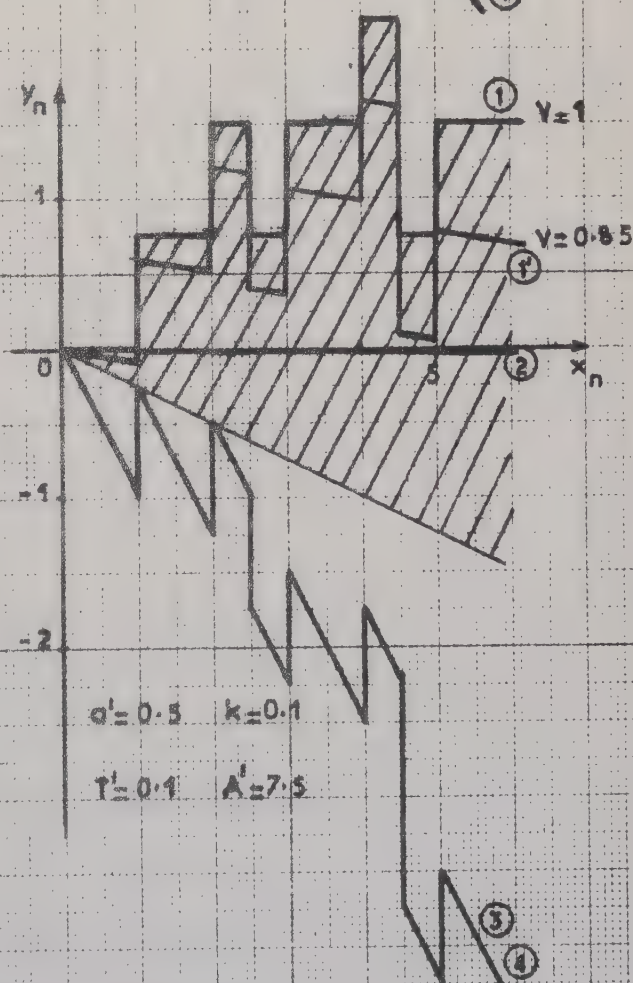
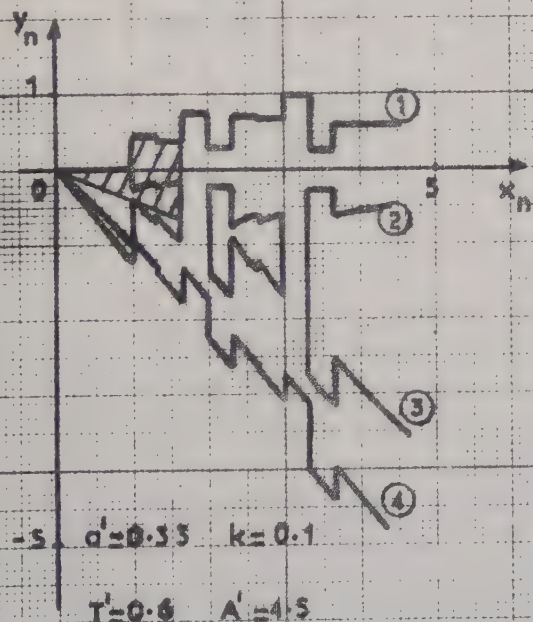
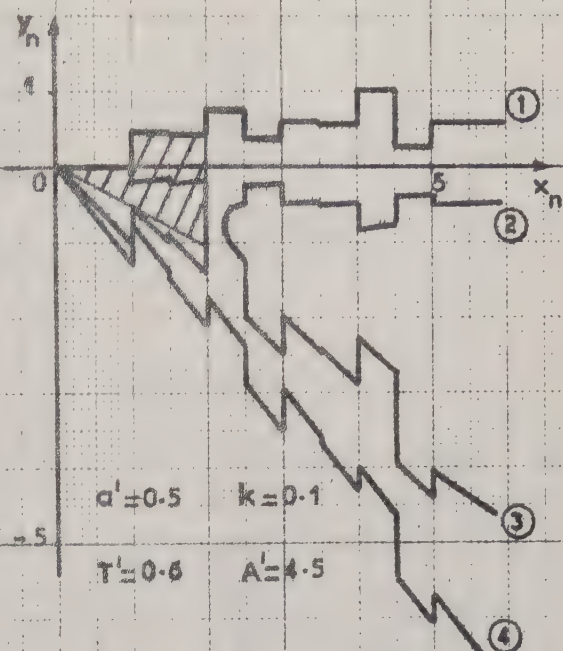
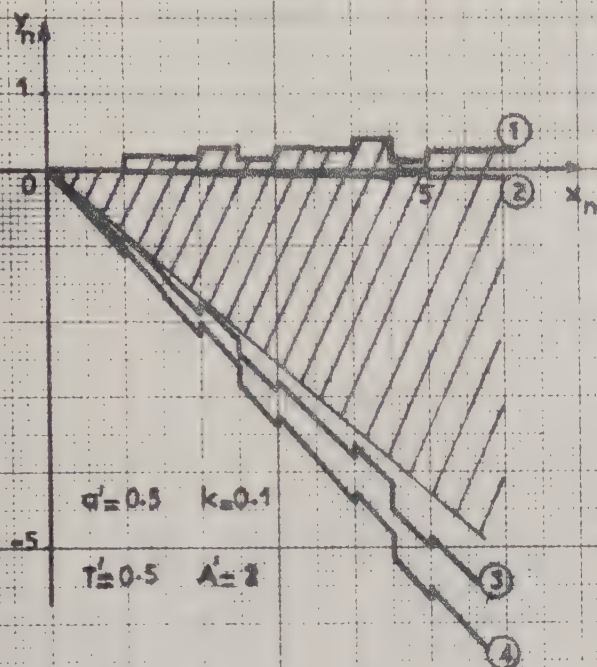


Figure 7-15

Réponse sans dépassement.



- ① $x_{n+1} = y x_n$
- ② $x_n + \lambda_1 x_n = 0$
- ③ $x_n + \lambda_2 x_n = 0$
- ④ $x_{n+1} = 0$

Figure 7-16

Dans ces conditions, nous pouvons choisir pour la limite inférieure (si $x_n > 0$) de D, une fonction γ_n constante. D'autre part l'allure des caractéristiques (C) et (C₁) (voir figure 3.1) toutes deux confondues avec l'axe des x à l'intérieur du seuil, nous conduirait à prendre une fonction δ_n nulle. En réalité la caractéristique (C) ($x_{n+1} = \vee x_n$), pourvu qu'elle soit située dans le premier quadrant, constitue une limite supérieure (si $x_n > 0$) du domaine D (voir Annexe 3).

7.6. Conclusion.

Après avoir présenté une simulation hybride du modulateur binaire, nous avons montré comment l'emploi du calcul multi-vitesse permettait d'automatiser le tracé des divers domaines de stabilité ou de temps de réponse, ainsi que celui des domaines assurant un régime dynamique fixé.

Nous avons aussi vérifié que les domaines suffisants obtenus analytiquement en exprimant la décroissance d'une distance ne différaient pas notablement des domaines nécessaires et suffisants du système réel.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Il a été abordé, dans ce travail, l'étude des systèmes asservis discrets à commande linéaire et partie continue linéaire.

En premier examen, certaines caractéristiques de cette classe de systèmes sont exposées :

Le fonctionnement d'un tel système est défini par un nombre important de paramètres, l'équation de récurrence (sous forme scalaire ou vectorielle) possède des coefficients fonctions implicites de l'erreur et présentant, de plus, les discontinuités, la "contribution de la régulation" peut localement décroître avec le module de l'erreur.

Deux méthodes d'analyse de la stabilité d'un ensemble d'équilibre non ponctuel ont été proposées : l'une basée sur une extension de la Seconde Méthode de Ljapunov et l'autre sur l'application de la notion de distance d'un point à un ensemble dans un espace métrique complet, ou espace de Banach.

La convergence uniforme d'une variable d'état, a permis d'imposer, pour un asservissement échantillonné non linéaire du second ordre, un régime dynamique sans dépassement et un temps de réponse à $\beta\%$ mes fixé.

Ces diverses études ont été mises en application, lorsque l'objet à régler est du premier ou du second ordre. Deux points particuliers ont été mis en évidence :

- D'une part, lorsque l'objet est du premier ordre, des cycles limites, dont l'existence dépend de la valeur de l'entrée, ont été mis en évidence.
- D'autre part, pour un objet du second ordre avec intégration, le système est caractérisé par un régime transitoire relativement lent.

En conclusion, l'utilisation d'un calculateur binaire dans une chaîne de régulation ne semble vraiment intéressante que lorsque la partie continue comporte une intégration ; toutefois le code utilisé ici (binaire naturel) n'est sans doute pas celui qui conduit aux meilleures performances.

Une application possible d'un tel code de régulation pourrait être trouvée dans le domaine de l'astronautique. Par exemple, l'utilisation d'un calculateur binaire dans un système de contrôle l'état d'un engin spatial permettrait d'éviter l'embarquement du calculateur et du récepteur numérique analogique associés, et conduirait ainsi à une diminution de masse. Mais alors, le problème de la transmission de l'information en présence de bruit se poserait et il conviendrait de passer du cadre déterministe au cadre probabiliste.

Nous souhaitons donc, maintenant, nous intéresser plus particulièrement au problème de l'insensibilité du code au bruit ainsi qu'aux conditions très importantes d'observabilité et de commandabilité des systèmes à calculateur binaire. Selon nous, un meilleur choix de code serait ainsi rendu possible, et les performances de cette classe de systèmes pourraient être grandement améliorées.

ANNEXE 1

Existence du domaine D

Le domaine D, inclus dans E, est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\gamma_n x_n < y_n < -\delta_n x_n \\ \gamma_n \leq \frac{a_n}{b_n} \quad \delta_n \geq -\frac{\lambda - c_n}{b_n} \end{array} \right. \quad (1)$$

Si γ_n est une fonction décroissante et δ_n une fonction croissante de $|x_n|$, une condition suffisante de stabilité de D par rapport aux conditions initiales s'écrit :

$$-\gamma_n x_{n+1} < y_{n+1} < -\delta_n x_{n+1} \quad (2)$$

ou encore, en remplaçant x_{n+1} et y_{n+1} par leurs valeurs données par (3.1) :

$$-\gamma_n (c_n x_n + b_n y_n) < c_n x_n + d_n y_n < -\delta_n (c_n x_n + b_n y_n) \quad (3)$$

1 - Considérons d'abord la première inégalité de (3) ; elle peut s'écrire :

$$y_n > -\frac{c_n + \gamma_n c_n x_n}{c_n + \gamma_n b_n} \quad (4)$$

dans la mesure où :

$$\gamma_n > 0 \quad c_n > 0 \quad (5)$$

Or par hypothèse

$$y_n > -\gamma_n x_n$$

Il suffit donc que

$$-\gamma_n x_n > -\frac{c_n + \delta_n a_n}{c_n + \delta_n b_n} x_n$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\gamma_n b_n + (c_n - a_n) \gamma_n - c_n < 0} \quad (6)$$

D - La deuxième inégalité de (6) peut se mettre sous la forme :

$$(c_n + \delta_n a_n) x_n < - (c_n + \delta_n b_n) y_n \quad (7)$$

$$E.1 \quad \underline{c_n + \delta_n b_n > 0} \quad \text{soit} \quad \delta_n > -\frac{c_n}{b_n}$$

Le même raisonnement que précédemment conduit à la condition suffisante suivante :

$$\boxed{\delta_n^2 b_n + (c_n - a_n) \delta_n - c_n > 0} \quad (8)$$

$$E.2 \quad \underline{c_n + \delta_n b_n < 0} \quad \text{soit} \quad (9) \quad \delta_n < -\frac{c_n}{b_n}$$

La relation (7) devient maintenant :

$$y_n > -\frac{c_n + \delta_n a_n}{c_n + \delta_n b_n} x_n$$

par ailleurs :

$$y_n < -\delta_n x_n$$

Les deux inégalités sont satisfaites si :

$$\boxed{\delta_n^2 b_n + (c_n - a_n) \delta_n - c_n > 0} \quad (9)$$

avec

$$-\frac{c_n + \delta_n a_n}{c_n + \delta_n b_n} x_n < y_n < -\delta_n x_n \quad (10)$$

Or d'après (9)

$$-\delta_n x_n > \frac{c_n}{b_n} x_n \quad (11)$$

La continuité du domaine D s'exprime alors par :

$$\frac{c_n}{b_n} x_n > -\frac{c_n + \delta_n a_n}{c_n + \delta_n b_n} x_n.$$

ou encore

$$\delta_n (c_n + a_n) b_n < - (b_n c_n + a_n^2)$$

Comme $(c_n + a_n)$ est positif d'après les conditions (1) et (5)

$$\delta_n < -\frac{b_n c_n + a_n^2}{b_n (c_n + a_n)} \quad (12)$$

par hypothèse

$$\delta_n < -\frac{c_n}{b_n} \quad (9)$$

L'inégalité (12) est vérifiée si

$$-\frac{c_n}{b_n} < -\frac{b_n c_n + a_n^2}{b_n (c_n + a_n)}$$

soit :

$$\boxed{c_n a_n - b_n c_n > 0}$$

ANNEXE 2

Or, dans l'équation (1) du chapitre cinq, les conditions suffisantes pour que la distance $a(P_i)$ soit décroissante, sont :

$$\sum_{i=0}^3 n_i \cdot 3 \cdot T' \cdot e^{-\frac{1}{T'}} \left(e^{-\frac{x_i}{4T'}} - 1 \right) e^{-\frac{1}{4T'}} < \sum_{i=0}^3 n_i \cdot k \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^3 n_i \cdot k < \frac{2 \cdot x_{\max}}{L'} \quad (2)$$

Procédant pas à pas, ainsi qu'il a été expliqué précédemment, examinons l'inégalité (2).

$1 < |x_{\max}| < 1 + a'$ L'inégalité (2) s'écrit alors :

$$kA' < 2$$

$1 < |x_{\max}| < 1 + 2a'$

Les deux conditions suivantes doivent alors être remplies :

$$kA' < 2$$

$$kA' < 2 (1 + a')$$

La plus stricte des deux, que nous conservons, est évidemment :

$$kA' < 2$$

$1 < |x_{\max}| < 1 + 3a'$

Il faut maintenant comparer

$$kA' < 2$$

et $kA' < 1 + 2a'$

Or $2 < 1 + 2a'$ si $a' > \frac{1}{2}$

donc si $a' > \frac{1}{2}$ $kA' < 2$

si $a' < \frac{1}{2}$ $kA' < 1 + 2a'$

$$\underline{1 < |x_{\frac{1}{2}}| < 1 + 2a'}$$

$$\text{Si } a' > \frac{1}{2} \begin{cases} \alpha' < 2 \\ \beta' < 2 + 4a' \end{cases} \quad \beta' < 2$$

$$\text{Si } a' < \frac{1}{2} \begin{cases} \alpha' < 1 + 2a' \\ \beta' < 2 + 3a' \end{cases} \quad \beta' < 1 + 2a'$$

$$\underline{1 < |x_{\frac{1}{2}}| < 1 + 4a'}$$

$$\text{Si } a' > \frac{1}{2} \begin{cases} \alpha' < 2 \\ \beta' < 1 + 4a' \end{cases}$$

Or $2 < 1 + 4a'$ si $a' > 0,25$ ce qui est satisfait.

D'où la condition retenue :

$$\beta' < 2$$

$$\text{Si } a' < \frac{1}{2} \begin{cases} \beta' < 1 + 2a' \\ \alpha' < 1 + 4a' \end{cases} \quad \beta' < 1 + 2a'$$

$$\underline{1 < |x_{\frac{1}{2}}| < 1 + 6a'}$$

$$\text{Si } a' > \frac{1}{2} \begin{cases} \beta' < 2 \\ \alpha' < 1 + 5a' \end{cases} \quad \beta' < 2$$

$$\text{Si } a' < \frac{1}{2} \begin{cases} \beta' < 1 + 2a' \\ \alpha' < 1 + 5a' \end{cases} \quad \beta' < 1 + 2a'$$

$$\underline{1 < |x_{\frac{1}{2}}| < 1 + 7a'}$$

$$\text{Si } a' > \frac{1}{2} \begin{cases} \beta' < 2 \\ \alpha' < \frac{2}{3} + 2a' \end{cases} \quad \beta' < 2$$

$$\text{Si } a' < \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} kA' < 1 + 2a' \\ kA' < \frac{2}{3} + 4a' \end{array} \right.$$

$$\text{Or } 1 + 2a' < \frac{2}{3} + 4a' \quad \text{si } a' > \frac{1}{6}$$

$$\text{d'où } \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } \frac{1}{6} < a' < \frac{1}{2} & kA' < 1 + 2a' \\ \text{si } a' < \frac{1}{6} & kA' < \frac{2}{3} + 4a' \end{array} \right.$$

$$\underline{1 < |x_n| < 1 + 3a'}$$

$$\text{Si } a' > \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} kA' < 2 \\ kA' < 2 + 14a' \end{array} \right. \quad kA' < 2$$

$$\text{Si } \frac{1}{3} < a' < \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} kA' < 1 + 2a' \\ kA' < 2 + 14a' \end{array} \right. \quad kA' < 1 + 2a'$$

$$\text{Si } a' < \frac{1}{6} \quad \left\{ \begin{array}{l} kA' < \frac{2}{3} + 4a' \\ kA' < 2 + 14a' \end{array} \right. \quad kA' < \frac{2}{3} + 4a'$$

$$\underline{1 < |x_n| < \infty}$$

$$\text{Si } a' > \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} kA' < 2 \\ kA' < 1 + 3a' \end{array} \right. \quad kA' < 2$$

$$\text{Si } \frac{1}{6} < a' < \frac{1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} kA' < 1 + 2a' \\ kA' < 1 + 3a' \end{array} \right. \quad kA' < 1 + 2a'$$

$$\text{Si } a' < \frac{1}{3} \cdot \begin{cases} kA' < \frac{2}{3} + 4a' \\ kA' < 1 + 3a' \end{cases} \quad kA' < \frac{2}{3} + 4a'$$

L'inégalité (1) se traiterait de la même façon. Le tableau suivant, qui résume l'ensemble des conditions, permet de choisir les paramètres du système afin d'assurer un domaine quelconque de stabilité par rapport aux conditions initiales.

Nous posons

$$u = 4 T' e^{-\frac{1}{T'}} \left(e^{\frac{k}{4T'}} - 1 \right)$$

$1 < x_n < 1 + a'$	$kA' < 2$	$2u < k$
$1 < x_n < 1 + 2a'$	$kA' < 2$	$2ue^{1/4T'} < k$
$1 < x_n < 1 + 3a'$	$kA' < 2$ si $a' > \frac{1}{2}$ $kA' < 1+2a'$ si $a' < \frac{1}{2}$	$2ue^{1/4T'} < k$
$1 < x_n < 1 + 4a'$	$kA' < 2$ si $a' > \frac{1}{2}$ $kA' < 1+2a'$ si $a' < \frac{1}{2}$	$2ue^{2/4T'} < k$
$1 < x_n < 1 + 5a'$	$kA' < 2$ si $a' > \frac{1}{2}$ $kA' < 1+2a'$ si $a' < \frac{1}{2}$	$2ue^{2/4T'} < k$
$1 < x_n < 1 + 6a'$	$kA' > 2$ si $a' > \frac{1}{2}$ $kA' < 1+2a'$ si $a' < \frac{1}{2}$	$2ue^{2/4T'} < k$
$1 < x_n < 1 + 7a'$	$kA' < 2$ si $a' > \frac{1}{2}$ $kA' < 1+2a'$ si $\frac{1}{6} < a' < \frac{1}{3}$ $kA' < \frac{2}{3} + 4a'$ si $a' < \frac{1}{6}$	$2ue^{2/4T'} < k$

$1 < x_n < 1 + 3a'$	$kA' < 2 \quad \text{si } a' > \frac{1}{2}$ $kA' < 1+2a' \quad \text{si } \frac{1}{6} < a' < \frac{1}{2}$ $kA' < \frac{2}{3}+4a' \quad \text{si } a' < \frac{1}{6}$	$2 \, uc^{3/4T'} < k$
$1 < x_n < +\infty$	$kA' < 2 \quad \text{si } a' > \frac{1}{2}$ $kA' < 1+2a' \quad \text{si } \frac{1}{6} < a' < \frac{1}{2}$ $kA' < \frac{2}{3}+4a' \quad \text{si } a' < \frac{1}{6}$	$2 \, uc^{3/4T'} < k$

ANNEXE 3

La caractéristique (C), lieu des points tels que $x_{n+1} = \lambda x_n$, est définie par :

$$y_n = \frac{\lambda - a_n}{b} x_n \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (1)$$

Supposons que (C) soit située dans les premier et troisième quadrants, et supposons de plus que x_n soit positif :

$$\frac{\lambda - a_n}{b} x_n > 0 \quad (2)$$

Cherchons alors la condition pour que :

$$y_{n+1} = c_n x_n + d \left(\frac{\lambda - a_n}{b} x_n \right) < 0 \quad (3)$$

ce qui s'exprime par :

$$(a_n d - b c_n) - \lambda d > 0 \quad (4)$$

Or, nous savons que :

$$a_n d - b c_n > 0 \quad d > 0 \quad (5)$$

Une condition suffisante pour que (4) soit vérifiée est donc obtenue pour $\lambda = 1$, c'est-à-dire :

$$a_n d - b c_n - d > 0 \quad (6)$$

Remplaçant les coefficients par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$e^{-ix} < \frac{e^{kx} - 1}{kx} \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad x = \frac{1}{4T} \quad (7)$$

condition qui est naturellement vérifiée.

Une caractéristique (C) située dans les premier et troisième quadrants, peut donc constituer une limite d'un domaine D.

B I B L I O G R A P H I E

- (1) R.W. ROCHELLE :
"Pulse frequency modulation"
I.R.E. Transactions on space electronics and Telemetry
(Février 1962).
- (2) M. STAROSWIECKI :
"Contribution à l'analyse des systèmes à commutation complexe"
Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Lille, 1970.
- (3) J. BERNUSSON :
"Contribution à l'étude des systèmes commandés par impulsions
modulées en fréquence"
Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Toulouse, 1970.
- (4) G.M. RUSSEL :
"Modulation et codage dans les systèmes automatiques"
Dunod, 1964.
- (5) J. PREMINGER, B.S. SUPER :
"Regulator systems with pulse-sign modulation of the sampled
error".
Israël Journal of Technology, Vol. 7, n° 3, p. 227-33, 1969.
- (6) L. POVY :
"Sur la stabilité d'un système asservi à modulation quantifiée
de position des impulsions".
C.R. Acad. Sciences, t. 265, p. 151-153, 1967.
- (7) L. POVY, J.M. TOULOTTE :
"Mise en équations de divers systèmes discrets quantifiés"
Rapport D.G.R.S.T., Lille 1967.
- (8) V.M. KUNSTEVICH, Yu. N. CHEKHOVCI :
"Stability of doubly (pulse frequency and pulse width) modulated
systems"
Automation and Remote Control, n° 7, 1967.

- (9) L.R. NARDIZZI, G.A. BEKEY :
"Optimization of discrete-time systems with combined modulation"
I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, Juin 1968.
- (10) P. VIDAL :
"Systèmes échantillonnés non linéaires"
Gordon and Breach, Paris 1968.
- (11) J. LA SALLE, S. LEFSCHETZ :
"Stability by Ljapunov's Direct Method"
Academic Press, 1961.
- (12) V.M. KUNSTEVIKH, Yu. N. CHEKHOVOI :
"Investigating stability of sampled data control systems with pulse-frequency modulation, using Ljapunov's Direct Method"
Automation and Remote Control, Février 1967.
- (13) S. WEGRZYN, J.C. GILLE, P. VIDAL, O. PALUSINSKI :
"Introduction à l'étude de la stabilité dans les espaces métriques".
Cours de la Faculté des Sciences de Lille, 1969.
- (14) C. BERGE :
"Espaces topologiques. Fonctions multivoques"
Collection Universitaire de Mathématiques. Dunod 1966.
- (15) S. WEGRZYN, J.C. GILLE, P. VIDAL, O. PALUSINSKI :
"Stabilité illimitée des systèmes échantillonnés non linéaires dans les espaces métriques".
C.R. Acad. Sciences, t. 270, série A, p. 418-421, 1970.
- (16) S. WEGRZYN, J.C. GILLE, P. VIDAL, O. PALUSINSKI :
"Stabilité limitée des systèmes échantillonnés non linéaires dans les espaces métriques"
C.R. Acad. Sciences, t. 270, Série A, p. 490-493, 1970.

- (17) R. DAVID, J.M. SIRET :
"Sur le régime dynamique des systèmes échantillonnés non linéaires".
C.R. Acad. Sciences, t. 271, série A, p. 55-56., 1970.
- (18) S. WEGRZYN, J.C. GILLE, P. VIDAL, O. PALUSINSKI :
"The stability domain with respect to initial conditions"
3ème Congrès International d'Automatisme IFAC, Londres, 1966.
- (19) L. POVY :
"Contribution à l'analyse et la synthèse des asservissements échantillonnés non linéaires en régime dynamique"
Thèse de Doctorat ès Sciences, Lille 1939.
- (20) L. POVY, J.M. TOULOTTE :
"Sur la stabilité d'un système discret non linéaire du premier ordre comportant un modulateur binaire d'impulsions"
C.R. Acad. Sciences, t. 265, p. 901-903, 1967.
- (21) A. NEHME :
Rapport de stage D.E.A. Faculté des Sciences, Paris, Juin 1970.
- (22) F. LAURENT :
"Stabilité asymptotique d'un système échantillonné non linéaire à partie continue du premier ordre"
C.R. Acad. Sciences, t. 260, 1965.
- (23) C. MELIN, J.M. TOULOTTE :
"Les machines hybrides"
Note interne du L.G.E., Paris 1970.
- (24) R. DAVID, J.M. SIRET :
"Simulation hybride de modulateurs non linéaires"
Note interne du L.G.E., Paris 1970.

TABLE DES MATIERES

	Pages
<u>Introduction générale -</u>	
Chapitre 1 : <u>Généralités sur les systèmes échantillonnés à modulateur non linéaire .</u>	
1.1. Introduction	1
1.2. Définition des systèmes échantillonnés	1
1.3. Divers types de systèmes échantillonnés	2
1.4. Diverses sortes d'échantillonneurs non linéaires . .	3
1.4.1. Echantillonneur à période variable	3
1.4.2. Echantillonneur à période constante	4
1.5. Principaux modulateurs impulsionnels	5
1.5.1. Modulateur P.S.M.	5
1.5.2. Modulateur de position	6
1.5.3. Modulation par un train d'impulsions	7
1.5.4. Modulation de cadence	7
1.5.5. Modulation binaire	8
1.5.6. Remarque	9
1.6. Caractéristiques des modulateurs binaires	9
1.7. Mise en équation des systèmes étudiés	10
1.8. Intérêt des systèmes asservis à modulateur binaire .	12
1.9. Conclusion	13
Chapitre 2 : <u>Stabilité d'un système par rapport à un ensemble d'équilibre.</u>	
2.1. Introduction	14
2.2. Méthode discrète de Ljapunov	14
2.2.1. Rappel de la méthode de Ljapunov	14
2.2.2. Extension de la méthode de Ljapunov	15
2.3. Stabilité dans les espaces métriques	18
2.3.1. Définitions - Rappel	18
2.3.2. Extension au cas où il existe un ensemble de points fixes	19
2.3.3. Stabilité illimitée	21
2.3.4. Stabilité limitée	22

2.4. Conclusion	23
Chapitre 3 : <u>Etude du régime dynamique d'un système échantillonné.</u>	
3.1. Introduction	24
3.2. Exposé de la méthode	24
3.2.1. Domaine de temps de réponse par rapport aux valeurs des variables	25
3.2.2. Domaine de temps de réponse par rapport aux conditions initiales	26
3.3. Conclusion	28
Chapitre 4 : <u>Analyse du régime dynamique d'un asservissement comportant un modulateur binaire et un objet du premier ordre.</u>	
4.1. Introduction	29
4.2. Description du modulateur	29
4.3. Mise en équation	31
4.4. Etude de la stabilité en régime autonome	33
4.4.1. Stabilité globale	33
4.4.2. Stabilité illimitée	36
4.5. Etude du régime transitoire	37
4.6. Comportement du système en présence d'une entrée constante	42
4.7. Conclusion	45
Chapitre 5 : <u>Stabilité d'un asservissement comportant un modula- teur binaire et un objet du second ordre.</u>	
5.1. Introduction	46
5.2. Mise en équation du système	46
5.2.1. Forme normale naturelle	49
5.2.2. Forme matricielle	50
5.3. Choix d'une distance	51
5.4. Mise en oeuvre de la méthode	52
5.4.1. Stabilité par rapport aux conditions initiales .	53
5.4.2. Stabilité illimitée	57
5.5. Conclusion	60

Chapitre 6 : Régime dynamique d'un asservissement comportant un modulateur binaire et un objet du second ordre.

6.1. Introduction	61
6.2. Application de la notion de distance à la détermination du temps de réponse	61
6.2.1. Principe de la méthode	61
6.2.2. Mise en oeuvre	62
6.2.3. Exemple	63
6.2.4. Remarque	65
6.3. Obtention d'un régime transitoire sans dépassement . . .	65
6.3.1. Condition d'existence du domaine D au voisinage du seuil	70
6.3.2. Condition d'existence du domaine D à la saturation	70
6.4. Conclusion	72

Chapitre 7 : Simulation des asservissements à modulateur binaire et objet du premier ou du second ordre.

7.1. Introduction	73
7.2. Réalisation du modulateur	73
7.2.1. Quantification	74
7.2.2. Emission des impulsions	75
7.2.3. Diagramme de fonctionnement	76
7.2.4. Schéma général	76
7.2.5. Réglage des divers paramètres	81
7.3. Domaines de stabilité et de temps de réponse du premier ordre	81
7.3.1. Principe du tracé automatique	81
7.3.2. Montage	83
7.3.3. Résultats	83
7.3.4. Remarque	83
7.4. Domaines de stabilité du second ordre	86

7.5. Domaines conduisant à des régimes transitoires sans dépassement	89
7.5.1. Propriété géométrique de c_1 et c_2	89
7.5.2. Montage	91
7.5.3. Résultats	92
7.6. Conclusion	95
<u>Conclusion générale</u>	96

Annexes

1. Existence du domaine D	98
2. Stabilité par rapport aux conditions initiales du second ordre	101
3. Propriété de la caractéristique C.	106

Bibliographie

Vu et permis d'imprimer
Paris, le 9 Mars 1971

Le Président
de l'Université de Paris VI

A. HERPIN

